Université Paris Diderot
M2 ISIFAR, 2009-2010
Outils probabilistes

Vecteurs Gaussiens

Exercice 1 Étant donné (X, Y) un vecteur gaussien, X désignant lui-même un vecteur de dimension n et Y une variable uni-dimensionnelle, montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y) + \langle a, X - \mathbb{E}(X)\rangle$$

On pourra considérer la projection orthogonale $\hat{Y}$ de Y sur le sous-espace de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ engendré par les v.a. $1, X_1, \dots, X_n$ et montrer que $Y - \hat{Y}$ et $(X_1, \dots, X_n)$ sont indépendants. Montrer dans le cas où $\det(K_X) > 0$ que $a = K_X^{-1}\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 2 Si (X, Y, Z) est un triplet gaussien centré et si X et Y sont indépendantes, montrer que :

$$\mathbb{E}(Z|(X, Y)) = \mathbb{E}(Z|X) + \mathbb{E}(Z|Y).$$

Exercice 3 Soit $\rho \in]-1, 1[$ et (X, Y) un vecteur gaussien centré et de matrice de covariance

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère une v.a. réelle Z indépendante de (X, Y).

1. Pour tout réel z, déterminer la loi de la v.a. $\frac{X+zY}{\sqrt{1+z^2+2\rho z}}$.
2. Soit U la v.a.r définie par :

$$U = \frac{X + ZY}{\sqrt{1 + Z^2 + 2\rho Z}}.$$

   Pour f borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(f(U)|Z)$. En déduire la loi de la v.a. U.
3. On suppose dans cette question que $\rho = 0$. On considère $U = \frac{X+ZY}{\sqrt{1+Z^2}}$ et on pose :

$$V = \frac{ZX - Y}{\sqrt{1 + Z^2}}.$$

   Quelle est la loi du couple (U, V) ?

Exercice 4 Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et X une v.a. indépendante de $\mathcal{B}$ de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1. Montrer que pour toute v.a.r. Y $\mathcal{B}$-mesurable, la v.a.r

$$Z = \exp(-\frac{\sigma^2}{2}Y^2 + XY),$$

   est d'intégrale finie, égale à 1.

2. Trouver l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Z|\mathcal{B})$.

Exercice 5 Soient X et Y deux v.a. indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $U = \inf(X,Y)$ et $V = \sup(X,Y)$. Trouver $\mathbb{E}(U|V)$ et la meilleure prédiction affine de U en fonction de V.

Exercice 6 (Caractérisations de l'indépendance)

Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et X une v.a.r.. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. La v.a.r. X est indépendante de la sous-tribu $\mathcal{B}$.
2. Pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée, on a :
$$\mathbb{E}[f(X)|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[f(X)].$$
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$\mathbb{E}[\exp(itX)|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[\exp(itX)].$$

Cas particulier. On pourra écrire ce que deviennent ces équivalences dans le cas particulier où $\mathcal{B} = \sigma(Y)$ avec Y v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Exercice 7 (Marche aléatoire gaussienne)

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.r. telle que $X_0 = 0$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit alors une suite $(Y_n^\lambda)_{n\geq 0}$ de v.a. à valeurs complexes par :

$$\forall n \geq 0,\ Y_n^\lambda = \exp\big(i\lambda X_n + n\lambda^2/2\big).$$

Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $(Y_n^\lambda)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale.
2. La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire gaussienne centrée réduite, i.e. il existe une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ telle que :
$$\forall n \geq 1,\ X_n = U_1 + \cdots + U_n.$$