Université Paris Diderot
M2 ISIFAR, 2009-2010
Outils probabilistes

Mouvement brownien

Exercice 1 On considère un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$. Montrer que le processus $(-B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

Exercice 2 Soit B un mouvement brownien.

1. Montrer que les processus suivants sont des martingales par rapport à la filtration $\sigma(B_s, s \leq t)$:
$$i)\,(B_t^2 - t)_{t\geq 0}, \qquad ii)\,\big(\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t)\big)_{t\geq 0}.$$
2. Montrer que si X est un processus continue tel que $X_0 = 0$ et que $(\exp(\alpha X_t - \frac{\alpha^2}{2}t))_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{F}$-martingale, alors X est un $\mathbb{F}$-mouvement Brownien.

Exercice 3 Étant donné un mouvement brownien B, calculer les premiers deux moments de la variable aléatoire suivante :
$$X = \int_0^1 B_s^2 ds.$$

Exercice 4 On considère deux mouvements browniens indépendants B^1 et B^2. Soit
$$B^3 = \sqrt{\rho}B^1 + \sqrt{1-\rho}B^2, \quad \rho > 0.$$
Montrer que B^3 est un mouvement brownien.

Exercice 5 On désigne par $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et par $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ la famille de v.a.r. donnée par :
$$\tilde{B}_0 = 0,\ \forall t > 0,\ \tilde{B}_t = tB_{t^{-1}}.$$

1. Démontrer que $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien centré et de fonction de covariance $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto s \wedge t$.
2. En déduire que $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ et $(B_t)_{t\geq 0}$ ont même loi.

Exercice 6 On appelle mouvement brownien de dimension d un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de la forme $(B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d))_{t\geq 0}$, où les $(B_t^i)_{t\geq 0}$, $1 \leq i \leq d$, sont des mouvements browniens (uni-dimensionnels) indépendants. Montrer pour un tel B et pour une matrice orthogonale U de taille d que le processus $(UB_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est encore un mouvement Brownien de dimension d.

Exercice 7 Étant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$, on définit un processus $(Z_t)_{0\leq t\leq 1}$ par la relation :
$$\forall t \in [0,1],\ Z_t = B_t - tB_1.$$

1. Montrer que $(Z_t)_{0\leq t\leq 1}$ est un processus gaussien indépendant de B_1 (appelé pont brownien). On précisera la moyenne et la covariance du processus.
2. On définit le processus retourné en temps (par rapport au temps 1) :

$$\forall t \in [0,1],\ Y_t = Z_{1-t}.$$

   Montrer que les deux processus suivent les mêmes lois fini-dimensionnelles.

Intégrale de Wiener

Exercice 8 Donner la loi de la v.a.

$$Y = \int_0^{+\infty} \exp(-s)dB_s.$$

On commencera par vérifier que Y est bien définie.

Exercice 9 Étant données deux fonctions f et g dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, on suppose que

$$\int_0^{+\infty} f(s)dB_s = \int_0^{+\infty} g(s)dB_s.$$

Que peut-on dire de f et g ?

Exercice 10 Étant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$, on définit le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ par :

$$\forall t \geq 0,\ X_t = \int_0^{t^{1/2}} (2s)^{1/2} dB_s.$$

Montrer que ce processus est gaussien. Calculer sa moyenne et sa covariance. En déduire que X est un mouvement brownien.