Université Paris Diderot
M2 ISIFAR, 2009-2010
Outils probabilistes

Intégrale de Wiener (suite)

Exercice 1 Étant donnés deux mouvements brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ indépendants et une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, montrer en revenant à la construction de l'intégrale de Wiener que les v.a.

$$\int_0^{+\infty} f_s dB_s \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f_s dW_s,$$

sont indépendantes. Généraliser au cas des processus.

Exercice 2 Étant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$, on désigne par $\mathcal{H}$ l'espace gaussien associé à $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Vect}\{B_t,\ 0 \leq t \leq 1\}}^{L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})}.$$

1. Montrer l'égalité suivante :

$$\mathcal{H} = \left\{ \int_0^1 f_s dB_s,\ f \in L^2([0,1]) \right\}.$$

   On pensera à utiliser l'isométrie d'Itô.
2. Étant donnés $X \in \mathcal{H}$ et $f \in L^2([0,1])$, montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :
   (a) $\mathbb{P}-$p.s., $X = \int_0^1 f_s dB_s$
   (b) $\forall t \in [0,1],\ \mathbb{E}(XB_t) = \int_0^t f_s ds.$
3. Étant donnée une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$, démontrer la formule d'intégrations par parties :

$$\mathbb{P}-\text{p.s.}, \int_0^1 f_s dB_s = f_1 B_1 - \int_0^1 f'_s B_s ds.$$

Intégrale d'Itô

Exercice 3 Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. En revenant à la construction de l'intégrale d'Itô, démontre, pour tout $t \geq 0$, la relation suivante

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

On commencera par approcher B sur $[0,t]$ par la suite de processus simples :

$$\forall n \geq 0, \forall s \geq 0,\ B_s^n = \sum_{i=0}^{n-1} B_{ti/n} \mathbb{1}_{[ti/n, t(i+1)/n[}(s).$$

Exercice 4 Étant donné un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$, montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$\int_0^t \big(1 + \frac{B_s}{n}\big)^n dB_s \underset{L^2}{\to} \int_0^t \exp(B_s) dB_s,$$

lorsque n tend vers l'infini. On commencera par vérifier que les intégrales sont bien définies.

Exercice 5 Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Quelle est la loi de la v.a.

$$\int_0^1 B_s dB_s\ ?$$