Université Paris Diderot
M2 ISIFAR, 2009-2010
Outils probabilistes

Formule d'Itô

Exercice 1 Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Appliquer la formule d'Itô et calculer dZ_t pour les processus Z suivants :

1. $Z_t = \frac{B_t}{1+t}$;
2. $Z_t = (X_t - k)^2$ où $X = \exp(\sigma B_t + \mu t)$;
3. $Z_t = \ln\left(\frac{X_t}{1-X_t}\right)$ où X_t satisfait $dX_t = X_t(1-X_t)dB_t$.

Exercice 2 Étant donnés une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ relativement à cette filtration, démontrer, en utilisant la formule d'Itô, que le processus $(B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2)_{t\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Exercice 3 Étant donnés une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ relativement à cette filtration, démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le processus $(M_t = \exp(\lambda B_t - \lambda^2 t/2)(B_t - \lambda t))_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.

Exercice 4 Pour $n \in \mathbb{N}$, nous posons

$$H_n(x,y) = \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n}\left[\exp(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}y)\right]_{|\alpha=0}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que $H_0(x,y) = 1$, $H_1(x,y) = x$, $H_2(x,y) = x^2 - y$, $H_3(x,y) = x^3 - 3xy$ et $H^4(x,y) = x^4 - 6x^2y + 3y^2$. Plus généralement, montrer que H_n est un polynome en (x,y). (On ne cherchera pas à calculer les coefficients.)
2. Que dire de $(H_i(B_t,t))_{t\geq 0}$, $i \in \{0, \cdots, 4\}$? (Ici, $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mouvement brownien.)
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(H_n(B_t,t))_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.

Exercice 5 Étant donnés une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et un mouvement brownien $(B_t^1, B_t^2)_{t\geq 0}$ en dimension deux relativement à cette filtration (en particulier B^1 et B^2 sont des $(\mathcal{F}_t)$-mouvements browniens indépendants). On pose

$$X_t = \int_0^t B_s^1 dB_s^2 - \int_0^t B_s^2 dB_s^1.$$

1. Montrer que X est une martingale de carré intégrable (c-à-d $E[X_t^2] < \infty$ pour tout $t \geq 0$).

2. Soit $\lambda > 0$, justifier rapidement l'égalité

$$E[e^{i\lambda X_t}] = E[\cos(\lambda X_t)].$$

3. A l'aide de la formule d'Itô, expliciter les décompositions de

$$Z_t = \cos(\lambda X_t)$$

comme somme d'une martingale locale et d'un processus à vairation finie.