Université Paris Diderot
M2 ISIFAR, 2009-2010
Outils probabilistes

Processus d'Itô

Exercice 1 Ecrire sous la forme d'un processus d'Itô la quantité

$$\forall t \geq 0,\ X_t = (B_t^1)^2 + (B_t^2)^2 + (B_t^3)^2,$$

où $(B_t^1, B_t^2, B_t^3)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien de dimension trois.

Exercice 2 Etant donnés deux mouvements browniens $(B_t^1)_{t\geq 0}, (B_t^2)_{t\geq 0}$ dans $\mathbb{R}$ relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tels que $\langle dB_t^1, dB_t^2\rangle = \rho dt$, $-1 \leq \rho \leq 1$. Soient $(u_t)_{t\geq 0}$ et $(v_t)_{t\geq 0}$ deux processus continus, adaptés à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et bornés par une constante K, montrer que le processus

$$\forall t \geq 0, \quad M_t = \exp\Big(\int_0^t u_s dB_s^1 + \int_0^t v_s dB_s^2 - \frac{1}{2}\int_0^t (u_s^2 + v_s^2 + 2\rho u_s v_s) ds\Big),$$

est une martingale.

Exercice 3 Etant donnés un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et deux processus continus adaptés $(u_t)_{t\geq 0}$ et $(v_t)_{t\geq 0}$ tels que

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{E}\int_0^t (u_s^2 + v_s^2) ds < +\infty,$$

montrer que

$$\Big(M_t = \big(\int_0^t u_s dB_s\big)\big(\int_0^t v_s dB_s\big) - \int_0^t u_s v_s ds\Big)_{t\geq 0}$$

est une martingale.

Exercice 4 Étant donnés un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et deux processus $(\phi_t)_{t\geq 0}$ et $(\psi_t)_{t\geq 0}$ continus et adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, tels que

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}\Big(\int_0^t \phi_s^2 ds + \int_0^t \psi_s^2 ds\Big) < +\infty,$$

on définit

$$\forall t \geq 0,\ X_t = 1 + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \phi_s dB_s.$$

On suppose que, p.s., pour tout $t \geq 0$, $X_t > 0$ et $\psi_t > 0$.

1. Montrer que le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$\forall t \geq 0,\ M_t = \exp\big(-\int_0^t (\psi_s / X_s) ds\big) X_t,$$

   est une martingale de carré intégrable relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

2. On suppose que, p.s., pour tout $t \geq 0$, $\psi_t/X_t \leq \lambda$, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, montrer que

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}(X_t) \leq \exp(\lambda t).$$

Exercice 5 Étant donnés un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et deux processus $(\phi_t)_{t\geq 0}$ et $(\psi_t)_{t\geq 0}$ continus et adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, tels que

$$p.s., \forall t \geq 0,\ |\psi_t| \leq K,\ K^{-1} \leq \phi_t \leq K,$$

pour une constante $K > 0$, on définit

$$\forall t \geq 0,\ X_t = x_0 + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \phi_s dB_s,$$

pour une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}$.
Montrer que le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$\forall t \geq 0,\ M_t = \exp\bigl(-\int_0^t (\psi_s/\phi_s) dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\psi_s/\phi_s)^2 ds\bigr) X_t,$$

est une martingale de carré intégrable relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.