Université Paris Diderot
M2 ISIFAR, 2009-2010
Outils probabilistes

Théorème Girsanov

Exercice 1 Soient B un movement Brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ rélativement à une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Soit en outre un procéssus $(\mu_t)_{t \geq 0}$ continu et borné et $\mathbb{F}$-adapté.

1. Vérifier que le processus M défini par
$$M_t := \exp\left(\int_0^t \mu_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mu_s^2 ds\right)$$
est une $\mathbb{P}$-martingrale.
2. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité définie sur $\mathcal{F}_T$ par $d\mathbb{Q} = M_T d\mathbb{P}$. Montrer que, si $T \geq t$ et si X est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable $\mathbb{Q}$-intégrable, alors
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}_t] = M_t^{-1} E_{\mathbb{P}}[X M_T|\mathcal{F}_t].$$
3. En déduire que M^{-1} est une $\mathbb{Q}$-martingale.
4. Soit $(\phi_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté continu borné et $L_t = \int_0^t \phi_s dB_s - \int_0^t \mu_s \phi_s ds$. Montrer que L est une $\mathbb{Q}$-martingale.
5. On pose $Z_t = M_t L_t$, calculer dZ_t et montrer que Z_t est une $\mathbb{P}$-martingale.

Exercice 2 Soit B un mouvement brownien rélativement à une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et θ un processus continue, borné et $\mathbb{F}$-adapté. Soit
$$H_t = \exp(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds).$$
On note $\mathbb{Q}$ la probabilité telle que $d\mathbb{Q} = H_t d\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$. Montrer que
$$E_{\mathbb{P}}(H_T \ln H_T) = E_{\mathbb{Q}}(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds).$$

Exercice 3 Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité qui est absoluement continue par rapport à $\mathbb{P}$ et si M_t est la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$, alors $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est un $\mathbb{P}$-martingale.

Exercice 4 Soit B un mouvement brownien rélativement à une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Soit Γ le processus solution de $d\Gamma_t = \Gamma_t(\beta_t dt + \gamma_t dB_t)$, $\Gamma_0 = 1$, où β et γ sont des processus $\mathbb{F}$-adapté et borné. On suppose que γ est strictement positif.

1. Montrer que $\Gamma_t \exp(-\int_0^t \beta_s ds)$ est une martingale.
2. Trouver une probabilité $\mathbb{Q}$ telle que Γ soit une $\mathbb{Q}$ martingale.
3. Calculer $d\Gamma_t^{-1}$. Trouver une probabilité $\widetilde{\mathbb{Q}}$ telle que Γ^{-1} soit une $\widetilde{\mathbb{Q}}$ martingale.

Exercice 5 Soit S la solution de

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = s,$$

où les coefficients μ et σ sont constants.

1. Montrer que $S_t = s \exp(\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$.
2. On pose $\theta = -\frac{\mu - r}{\sigma}$ où r est une constante. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité définie sur $\mathcal{F}_t$ par

$$d\mathbb{Q} = L_t d\mathbb{P}, \quad \text{où } L_t = \exp(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t).$$

   Montrer que $(W_t = B_t - \theta t, t \geq 0)$ est un $\mathbb{Q}$ mouvement brownien.
3. Soit $\widetilde{\mathbb{P}}$ la probabilité définie sur $\mathcal{F}_t$ par $d\widetilde{\mathbb{P}} = Z_t d\mathbb{Q}$ avec $Z_t = \exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$. Montrer que

$$dS_t = S_t((r + \sigma^2)dt + \sigma d\widetilde{B}_t)$$

   où $\widetilde{B}$ est un $\widetilde{\mathbb{P}}$ mouvement brownien.
4. Soit $P_t = P_0 e^{rt}$. Montrer que $(\frac{S_t}{P_t}, t \geq 0)$ est une $\mathbb{Q}$-martingale. Montrer que $(\frac{P_t}{S_t}, t \geq 0)$ est une $\widetilde{\mathbb{P}}$-martingale.