Université Paris Diderot
M2 ISIFAR, 2009-2010
Outils probabilistes

EDS

Exercice 1 Soit B un mouvement brownien et $g(x) = e^{ix} = (\cos x, \sin x) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $Y_t = (Y_t^1, Y_t^2) = g(B_t)$ est la solution de l'équation stochastique différentielle stochastique

$$dY = -\frac{1}{2} Y_t dt + K Y_t dB_t, \quad \text{où } K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Soit B un mouvement brownien. Vérifier que les processus donnés résolve les EDS correspondantes

1. $X_t = e^{B_t}$ résout $dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + X_t dB_t$.
2. $X_t = \frac{B_t}{1+t}$ résout $dX_t = -\frac{1}{1+t} X_t dt + \frac{1}{1+t} dB_t$.

Exercice 3 Soient B^1, B^2 et B des mouvements browniens. Résoudre les EDS suivantes (est ce que les solutions sont uniques ?) :

1. $\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_t^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{pmatrix}$.
2. $dX_t = X_t dt + dB_t$.
3. $dX_t = -X_t dt + e^{-t} dB_t$.
4. $dX_t = (m - X_t) dt + \sigma dB_t$ où m et σ sont constantes.

Exercice 4 Soit B un mouvement brownien par rapport à $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Résoudre l'EDS Orstein-Uhlenbeck

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x \tag{1}$$

où μ et σ sont constantes. La solution est appelée le processus Orstein-Uhlenbeck.

1. Montrer que X est un processus gaussien et calculer $E(X_t)$ et $\mathrm{Var}(X_t)$.
2. Justifier que $\int_0^t X_s ds$ est un processus gaussien. Calculer $E[\exp(\int_0^t X_s ds)]$.
3. Calculer $E(X_t | \mathcal{F}_s)$ et $\mathrm{Var}(X_t | \mathcal{F}_s)$ pour $t > s$.
4. Soit X la solution de (1), et ϕ une fonction de class C^2. Ecrire la formule d'Itô pour $Z_t = \phi(X_t)$. En déduire que si $\phi(x) = \int_0^x \exp(-\mu \frac{y^2}{\sigma^2}) dy$, alors

$$Z_t = \sigma \int_0^t \exp(-\mu \frac{B_s^2}{\sigma^2}) dB_s + \phi(x).$$

Z est-elle une martingale de carré intégrable ?

5. Soit λ fixé, calculer
$$\Phi(t,x) = E(e^{\lambda X_t^2}).$$
Montrer que Φ est la solution d'une equation aux dérivées partielles. Soit $\Psi(t,x) = \ln \Phi(t,x)$. Montrer que
$$\Psi(t,x) = x^2 a(t) + b(t)$$
avec $a'(t) = -2a(t)(\mu + \sigma^2 a(t))$ et $b'(t) = -\sigma^2 a(t)$.

Exercice 5 Soit B un mouvement brownien et a, α, b, β des constantes réelles. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère l'EDS

$$dX_t = (a + \alpha X_t)dt + (b + \beta X_t)dB_t, \quad X_0 = x. \tag{2}$$

1. Montrer que (2) admet une unique solution.
2. On note $m(t) = E(X_t)$ et $M(t) = E(X_t^2)$. Montrer que $m(t)$ est la solution de l'EDO
$$y' - \alpha y = a, \quad y(0) = x. \tag{3}$$
3. Ecrire la formule d'Ito pour X^2 où X est la solution de (2).
4. En déduire que $M(t)$ est l'unique solution de l'EDO
$$y' - (2\alpha + \beta^2)y = 2(a + b\beta)m + b^2, \quad y(0) = x^2. \tag{4}$$
où m est la solution de (3) (On admettera que l'intégral qui intervient est une martingale).
5. Résoudre (3) et puis (4).

Exercice 6 Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire où

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t, \quad X_0 = x > 0.$$

On admet que l'EDS a une solution positive.