Université Paris Diderot
M2 ISIFAR, 2009-2010
Outils probabilistes

EDS II

Exercice 1 Soit X la solution de l'EDS suivante

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

où μ et σ^2 sont des fonctions affines : $\mu(x) = \mu_0 + \mu_1 x$, $\sigma^2(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x$. On souhaite montrer que pour toute fonction affine $\psi(x) = \psi_0 + \psi_1 x$ et pour tout θ, il existe deux fonctions α et β telles que,

$$E\Big(\exp(\theta X_T - \int_t^T \psi(X_s)ds)|\mathcal{F}_t\Big) = e^{\alpha(t)+\beta(t)X_t}.$$

1. Montrer que s'il existent deux fonctions α et β, alors le processus
$$e^{\alpha(t)+\beta(t)X_t}\exp(-\int_0^t \psi(X_s)ds)$$
est une martingale avec $\alpha(T) = 0, \beta(T) = \theta$.
2. Montrer que la détermination de α et β conduit à la résolution d'une équation différentielle non linéaire (équation de Ricatti), et puis d'une équation différentielle linéaire. On ne demande pas la résolution de ces équations.

Exercice 2 Soient α une constante et X la solution de l'EDS suivante

$$dX_t = -\alpha^2 X_t^2(1 - X_t)dt + \alpha X_t(1 - X_t)dB_t$$

avec la condition initiale $X_0 = x$, $x \in]0, 1[$. On admet que X prend ses valeurs dans l'intervalle]0,1[. On pose

$$Y_t = \frac{X_t}{1 - X_t}.$$

1. Quelle est l'EDS satisfaite par Y ?
2. En déduire X.

Exercice 3 (Option Asiatique) Soit S la solution de l'EDS

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t), S_0 = s > 0$$

où B est un mouvement brownien rélativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, les paramètres r et σ étant constants.

1. Soit K une constante. Montrer que le processus
$$M_t = E\Big((\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K)^+|\mathcal{F}_t\Big)$$
est une martingale.

2. Montrer que, si on pose $\xi_t = S_t^{-1}(K - \frac{1}{T}\int_0^t S_u du)$, on a

$$M_t = S_t E\Big((\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - \xi_t)^+ | \mathcal{F}_t \Big).$$

3. Soit

$$\Phi(t,x) = E\Big((\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - x)^+ \Big).$$

   Montrer que $\Phi(t,x) = E\big((\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - x)^+ | \mathcal{F}_t \big)$ et que $M_t = S_t \Phi(t, \xi_t)$.

4. Ecrire la formule d'Itô pour M. En déduire une équation aux dérivées partielles vérifiée par Φ.