Chapitre 1

Introduction aux produits dérivés de crédit

Le risque de crédit signifie les risques financiers liés aux incapacités d'un agent (un particulier, une entreprise ou un état souverain) de payer un engagement de remboursement. C'est un risque qui existe universellement pour les investisseurs même avant la création des marchés financiers. Le cas extrême est la faillite ou le défaut de l'agent. Un événement de défaut se produit rarement, mais il induit en général des grandes quantités de perte. Concernant un prêt ou une obligation, le risque de crédit est souvent mesuré par un *spread*, c-à-d, une différence de taux d'intérêt par rapport au taux sans risque. Plus le risque est elevé, plus le spread est grand pour le recompenser, en effet, cette différence de taux permet aux investisseurs de gerer les risques de crédit associées. Quand il s'agit d'une obligation corporate ou souveraine, le spread de crédit peut être évalué par une agence de notation, comme Moody's ou Standard & Poor's, où une note de crédit est attribué semestriellement ou annuellement suivant l'état financier de l'agent, avec laquelle les risques peuvent éventuellement mesurés quantitativement, souvent par des méthodes statistiques.

Les marchés de dérivés de crédit sont crées dans les années 1990, qui ont eu ensuite un développement très rapide. Un dérivé de crédit est un produit financier dont les paiements sont liés aux événements de crédit d'un agent sous-jacent, dont le but est de gerer, transferer et couvrir les risques de crédit liés à ce dernière. Les composants caractéristique d'un dérivé de crédit incluent le nom sous-jacent, l'événement de crédit (par exemple, défaut de l'agent ou défaut d'un paiement d'une obligation etc.), la date de défaut et de maturité, les paiements au cas de défaut ou sans défaut. Le produit le plus populaire est credit default swap (CDS), il existe aussi des produits portefeuille de crédit où les correlations de défauts entre les noms sous-jacent joue un rôle important.

1.1 Produits avec un seul sous-jacent

1.1.1 Credit default swap (CDS)

Les credit default swaps (CDS) sont des produits de base sur le marché dérivé de crédit et y joue un rôle fondamental. Un CDS contient un seul nom sous-jacent, il permet aux investisseurs du marché de gerer le risque de défaut du sous-jacent de façon dynamique. Par ailleurs, par rapport au note de crédit attribué par les agences de notation, les prix de CDS comme un indicateur quotidien sur la qualité de crédit de son sous-jacent.

Suggéré par son nom, un CDS resemble à un swap de taux d'intérêt dans le sens qu'il existe une échange de flux de paiements fixes et paeiments flottants entre son acheteur et son vendeur. Un CDS porte aussi la caractéristique d'un produit d'assurance qui fournit à son acheteur la protection contre le risque de défaut du sous-jacent. L'acheteur de protection paie un montant fixe s, appelé le *spread* du CDS, à des date régulières et prefixés jusqu'à la date de défaut τ si le défaut du sous-jacent a lieu avant la maturité T, au cas contraire, il va payer ce montant jusqu'à T. La partie flottante payée par le vendeur de protection dépend de l'état de défaut-ou-non du sous-jacent avant la maturité. Dans le cas de défaut, le vendeur de protection va rembourser l'acheter une proportion de son nominal qui dépend du taux de recouvrement R du sous-jacent, dans le cas sans défaut, le vendeur ne paie rien. Le taux de recouvrement est une quantité qui ne se révèle qu' au moment de défaut et il est en général difficile d'estimer sa valeur qui peut varier largement d'une entreprise à l'autre. Le prix d'un CDS, ou son spread, est déterminé à la date initialle tel que l'espérance de ces deux flux sont égale.

On introduit quelques notations. Soient τ la date de défaut du sous-jacent et R son taux de recouvrement qui est un processus $\mathbb{F}$-prévisible à valeur dans $[0,1]$. On désigne par s le spread du CDS. Soient $T_0 = 0$ la date de signature du CDS et T sa maturité. Les dates de paiement de l'acheteur sont $\{T_1, \cdots, T_n = T\}$ où $\Delta T = T_i - T_{i-1}$ sont égaux pour tout $i = 1, \cdots n$. On introdut une indice $\beta(t)$ à valeur dans $\{1, \cdots, n\}$ tel que $t \in [T_{\beta(t)-1}, T_{\beta(t)})$. Soit r le taux court et $D(t,T) = \exp(-\int_t^T r_s ds)$. Pour le vendeur du CDS, le flux futur qu'il va recevoir vu à une date $t < T \wedge \tau$ est donné par

$$s\Big\{(T_{\beta(t)}-t)D(t,T_{\beta(t)})1_{\{\tau>T_{\beta(t)}\}}+\sum_{i=\beta(t)+1}^{n}\Delta T D(t,T_i)\,1_{\{\tau>T_i\}}+(\tau-T_{\beta(\tau)-1})D(t,\tau)1_{\{\tau\leq T\}}\Big\},$$

qui peut être approximé par un flux continu

$$\int_t^{T\wedge\tau} sD(t,u)du.$$

Le flux payé par le vendeur est

$$1_{\{\tau\leq T\}}D(t,\tau)(1-R).$$

Quand $t = 0$, on obtient en prenant l'espérance la valeur du spread

$$s = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[1_{\{\tau \leq T\}}(1-R)D(0,\tau)\big]}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\int_t^T 1_{\{\tau > u\}} D(t,u)du]} \tag{1.1}$$

où $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre. Pour obtenir la valeur explicite de s par (1.1), nous avons besoin d'un modèle pour le temps de défaut τ que nous présenterons plus tard.

1.1.2 Formulation générale

De façon gńéral, un produit dérivé de crédit ou un produit financier sensitive au risque de défaut peut être représenté (voir par exemple Bielecki et Rutkowski (2002)) par un triplet (C,G,Z), où C est une variable aléatoire qui représente le paiement à la maturité T s'il n'y pas de défaut avant T, G est un processus de variation finie avec $G_0 = 0$ qui représente le paiement de coupon (continue) et Z signifie le paiement du recouvrement à la date de défaut τ si le défaut a lieu avant la maturité T.

Par exemple, un zero-coupon défautable (sans recouvrement) est un produit qui garantie à son acheteur 1 euro à la maturité T si le sous-jacent n'a pas fait faillite avant T et 0 sinon, donc $C = 1$ et $G = Z = 0$. Pour un CDS, on a $C = 0$, $Z = 1 - R$ et $G_t = st$ avec s le spread du CDS.

Un dérivé de crédit arrive à son terme après le défaut du sous-jacent, donc pour le problème de pricing, on s'intéresse à sa valeur (actualisée) à une date $t < \tau \wedge T$ qui est donnée par

$$V_t = 1_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[CD(t,T)1_{\{\tau > T\}} + \int_t^T 1_{\{\tau > u\}} D(t,u)dG_u + ZD(t,\tau)1_{\{\tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t\Big] \tag{1.2}$$

où $\mathbb{Q}$ désigne une probabilité risque-neutre, $D(t,T) = \exp(-\int_t^T r_s ds)$ est le facteur d'actualisation et $\mathcal{G}_t$ représente l'information globale du marché à la date t que l'on précisera plus tard.

1.2 Produits avec multiple sous-jacents

1.2.1 Basket default swap

Un basket default swap ou un k^{th}-to-default (ktD) swap est similaire à un CDS sauf que le produit est écrit sur un portefeuille de plusieurs sous-jacents. Ce type de produits permettent aux investisseurs de gérer les risques de plusieurs noms de façon globale avec un coût réduit et fournit à son acheteur la protection contre le $k^{\text{ème}}$ défaut passé du portefeuille. Le plus important et plus liquide est le First-to-default (FtD) swap.

Soient $\tau_1, \cdots, \tau_n$ une famille de temps aléatoires qui répresentent les temps de défaut de n noms sous-jacent. En pratique, $n = 3$ à 7. On introduit l'ensemble à l'ordre croissant de cette famille, c-à-d, une permutation $\{\tau_{(1)}, \cdots \tau_{(n)}\}$ de $\{\tau_1, \cdots \tau_n\}$ telle que

$$\tau_{(1)} \leq \cdots \leq \tau_{(n)}.$$

L'achteur de protection paie un montant préfixé, appelé le *spread* du ktD, à des dates régulières jusqu'à la date $\tau_{(k)}$ si celle-ci est avant la maturité T, au cas où il y a moins de k défauts avant T, alors le paiement continue jusqu'à T. Au moment $\tau_{(k)}$, le vendeur de protection rembourse une proportion de nominal $(1 - R^{(k)})$, où $R^{(k)}$ est le taux de recouvrement du $k^{\text{ème}}$ défaut.

Similaire que pour un CDS, le flux reçu par le vendeur d'un ktD à la date $t < T \wedge \tau_{(k)}$ est donné par $\int_t^T s_k 1_{\{\tau_{(k)} > u\}} D(t,u)du$ où s_k est le spread du ktD, le flux qu'il va payer au cas de défaut est $1_{\{\tau_{(k)} \leq T\}} D(t, \tau_{(k)})(1 - R^{(k)})$. On obtient donc une formule similaire que (1.1) pour le spread du ktD

$$s_k = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[1_{\{\tau_{(k)} \leq T\}}(1 - R^{(k)})D(0, \tau_{(k)})\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\int_t^T 1_{\{\tau_{(k)} > u\}} D(t,u)du]}. \tag{1.3}$$

Pour evaluer (1.3), la structure de correlation entre les défauts $\tau_1, \cdots, \tau_n$ est essentielle. Similaire que (4.1), la valeur du ktD à la date $t < T \wedge \tau_{(k)}$ vue par le vendeur est

$$V_t = 1_{\{\tau_{(k)} > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \Big[\int_t^{T \wedge \tau_{(k)}} s_k D(t,u)du - 1_{\{\tau_{(k)} \leq T\}} D(t, \tau_{(k)})(1 - R_\tau^{(k)}) | \mathcal{G}_t^{(n)} \Big].$$

Ici, l'information globale $\mathcal{G}_t^{(n)}$ doit contenir les observations de tous les événements de défaut jusqu' à la date t.

1.2.2 CDO

Collateralized debt obligation (CDO) est un produit financier qui permet aux institutions financiers de transferer et réattribuer les risques liés à leurs dettes et de diminuer les fonds propres associés, il propose également des choix flexibles d'investissement aux investisseurs qui ont de différentes préférences de risque.

Une CDO s'agit d'une transaction spéciale entre des investisseurs et des émetteurs de dettes par intermédiaire d'un organisme appelé *special purposed vehicle* (SPV). Le sous-jacent d'une CDO est un portefeuille de dettes (obligations, prêts, etc.) detenu par un institution financier comme par exemple une banque, le portefeuille supporte les risques de défaut de chaque nom. La mission de SPV consiste à reorganiser ces dettes sous forme des *tranches* de CDO et les revendre aux investisseurs du marché, ce procedure est appelé la *titrisation.* Les investisseurs, au lieu d'acheter directement les obligations individuelles, investit sur ces tranches de CDO suivant leurs goûts de risque. Il existe pour une CDO une tranche *equity*, un tranche *junior*, une ou plusieurs tranches *mezzanine* et une tranche *senior*. Chaque tranche de CDO a pour caractérisque d'une obligation : un investisseur paie un montant à la date initiale et reçoit des coupons prefixés pour la tranche correspondante à des dates régulières. Les remboursement des coupons respectent un principe de hiérarchisation : la tranche senior qui reçoit un coupon moins élevé est remboursé en premier, les tranches mezzanines et junior sont remboursés ensuite, la tranche senior qui porte un coupon excessif est remboursé à la fin. Par cet ordre de subordination, les tranches suupérieurs sont protégés par les tranches inferieurs contre le risque de défaut du portefeuille sous-jacent.

On consider un portefeuille de taille n. On désigne par τ_i $(i = 1, \cdots, n)$ les temps de défaut de chaque nom sous-jacent et par N_i son nominal. Soit $N = \sum_{i=1}^n N_i$. Le poid du $i^{\text{ème}}$ nom est $\omega_i = N_i/N$. Soit R^i le taux de recouvrement de τ_i. Le terme clé à calculer est la perte totale du portefeuille à la date $t \geq 0$ définie par

$$L_t = \sum_{i=1}^n N_i(1 - R^i)1_{\{\tau_i \leq t\}}$$

et la perte pourcentage est

$$l_t = L_t/N = \sum_{i=1} \omega_i(1 - R^i)1_{\{\tau_i \leq t\}}.$$

Evidemment, $0 \leq l_t \leq 1$. Une CDO est structurée par différentes tranches. On decompose l'intervalle $]0, 1]$ par des unions disjointes $]\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ où $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = 1$. L'intervalle $]\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ correspond au $j^{\text{ème}}$ tranche et α_{j-1} et α_j sont les barrières inférieure et supérieur, appelées *attachement point* et *detachement point*. Les premiers défauts induisent d'abord des pertes sur la tranche equity, le montant nominal de la tranche est réduit par la quantité de perte qui va également causer une perte de coupons. Quand la perte totale est inférieur au nominal de la tranche equity, i.e., si $l_t \leq \alpha_1$, les autres tranches sont protégées par celle-ci, quand $l_t > \alpha_1$, alors la tranche équity est complètement perdue et c'est la tranche junior qui commence à subir la perte. Ainsi, la perte pourcentage de la $j^{\text{ème}}$ tranche à la date t est donnée par un call spread, i.e.,

$$l_t^{(j)} = (l_t - \alpha_{j-1})^+ - (l_t - \alpha_j)^+ = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad l_t \leq \alpha_{j-1} \\ l_t - \alpha_{j-1}, & \text{if} \quad l_t \in]\alpha_{j-1}, \alpha_j] \\ \alpha_j - \alpha_{j-1}, & \text{if} \quad l_t > \alpha_j. \end{cases}$$

En d'autre termes, $l_t^{(j)}$ est l'intersection de $]\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ et $[0, l_t]$. On a en effet $l_t = \sum_{j=1}^k l_t^{(j)}$.

Les flux de cash d'une tranche CDO tranche est comme la suite. L'acheteur de la $j^{\text{ème}}$ tranche paie à la date initiale $t_0 = 0$ un montant nomial, et reçoit à des dates régulières

$\{t_1, \cdots, t_M = T\}$ les coupons qui sont proportionels par rapport au reste du montant principal de la tranche, c-à-d,

$$s_j\Big(1 - \frac{l_{t_u}^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\Big), \quad u = 1, \cdots, M$$

où s_j est le spread de la tranche. Quand la perte totale est inférieur à la barrière basse α_{j-1} de la tranche, l'acheteur reçoit la quantité complète de coupon. Dès que l_t atteint α_{j-1}, l'acheteur commence à souffrir d'une perte due à la perte de la valeur principalede la tranche. Si la perte totale est supérieur à la barrière haute α_j de la tranche, la tranche est totalement perdue et les paiements de coupon sont arrêtés. Sinon, à la maturité T, l'acheteur va recevoir le dernier coupon et le rest du principal

$$1 - \frac{l_T^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}.$$

Ainsi, les tranche supérieures sont protégée par les tranches inférieures.

Le flux de cash (actualisés à la date 0) vu par le vendeur de la $j^{\text{ème}}$ tranche est donnés par

$$N(\alpha_j - \alpha_{j-1})\Big[1 - s_j \sum_{u=1}^{M} D(0, t_u)\Big(1 - \frac{l_{t_u}^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\Big) - D(0, T)\Big(1 - \frac{l_T^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\Big)\Big]$$

d'où vient le spread s_j obtenu par le pricing risque-neutre

$$s_j = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[1 - D(0, T)\Big(1 - \frac{l_T^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\Big)\Big]}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\sum_{u=1}^{M} D(0, t_u)\Big(1 - \frac{l_{t_u}^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\Big)\Big]}$$

Si on suppose que les taux d'intérêt et ainsi les facteurs d'actualisation sont déterminists, alors les termes clés à calculer pour obtenir s_j sont

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(l_t - k)^+], \qquad \forall 0 \le t \le T,\ 0 \le k \le 1 \tag{1.4}$$

qui est une option Call écrite sur le processus de perte. A cause de sa taille ($n = 100$ à 125), la modélisation de la corrélation de défauts pour un CDO est très différente par rapport à celle pour les basket default swaps, et les méthods numériques sont nécessaires pour obtenir la valeur explicite de spread.

Les marchés des dérivés de crédit ont eu de nouveaux developpements ces dernières années, comme par exemple la création des indices de crédit (TracX, iBoxx). Ces indices réflectent le risque moyenne de crédit du marché. Par exemple, TracX est une indice proposée par JP Morgan et Morgan Stanley en 2003, qui contient 100 noms regroupés géographiquement comme TracX US, Europe ou Asie, où chaque nom correspond à une grande entreprise répresentative dont les CDSs sont traités liquidement sur le marché et occupe un poid equivalent dans le portefeuille de référence.

Les portefeuilles composants de ces indices sont utilisés comme des portefeuilles sous-jacent pour des *CDOs synthétique*, qui contiennent des CDSs au lieu de dettes physiques. Les tranches des CDOs synthétique sont standardisées comme $]0,3\%]$, $]3\%,6\%]$, $]6\%,9\%]$, $]9\%,12\%]$, $]12\%,100\%]$ (ou $]12\%,22\%]$ et $]22\%,100\%]$). Par rapport à une CDO classique où le portefeuille sous-jacent contient des dettes specifiques d'une banque, l'avantage d'une CDO synthéthique est d'avoir plus de transparence sur la qualité de produit. Par ailleurs, la transaction d'une seule tranche devient possible.