Chapitre 2

Temps d'arrêt et martingales

En terme de modélisation, un temps de défaut est un temps aléatoire dans un espace de probabilité. L'étude de ses propriétés est fortement liées aux informations accessibles au cours du temps, modélisées par une filtration. L'objectif de ce chapitre est de présenter ces notions mathématiques de base que nous utiliserons tout au long de ce cours.

2.1 Filtration et temps d'arrêt

On fixe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Une *filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de tribus $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$. On dit qu'un processus $(X_t, t \geq 0)$ est $\mathbb{F}$-*adapté* si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \geq 0$. On dit que $\mathbb{F}$ est engendrée par un processus X, noté $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$, si elle est la plus petite filtration par rapport à laquelle X est adapté.

Etant donnée une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on peut definir une nouvelle filtration associée $\mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}_{t+} = \cap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$. On dit que $\mathbb{F}$ est *continue à droite* si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+$. On introduit également $\mathcal{F}_\infty = \vee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_{t-} = \vee_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t-\varepsilon}$ et suppose par convention $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0$. On dit qu'une filtration $\mathbb{F}$ est *complète* si la tribu $\mathcal{A}$ est complète (c-à-d, tout sous-ensemble des ensembles $\mathbb{P}$-négligeables reste encore dans $\mathcal{A}$) et si $\mathcal{F}_t$ contient tout ensemble $\mathbb{P}$-négligeable dans $\mathcal{A}$. Pour la tribu $\mathcal{F}_t$, on peut définir sa complété par $\overline{\mathcal{F}}_t = \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{N})$ où $\mathcal{N}$ est l'ensemble qui contient tous les ensembles négligeables de $\mathcal{A}$. On dit qu'une filtration satisfait les *conditions usuelles* si elle est continue à droite et complète.

Lemme 2.1.1 *Toute filtration $\mathbb{F}$ admet une plus petite extension continue à droite et complète, appelé l'augmentation usuelle de $\mathbb{F}$, donnée par $(\overline{\mathcal{F}_t^+})_{t\geq 0} = (\overline{\mathcal{F}}_{t+})_{t\geq 0}$.*

Un temps aléatoire est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Un temps aléatoire τ est appelé un $\mathbb{F}$-*temps d'arrêt* si $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$. En d'autres terms, le processus $(D_t^\tau = 1_{\{\tau\leq t\}}, t \geq 0)$ est $\mathbb{F}$-adapté, ou encore, le processus

$(\tau \wedge t, t \geq 0)$ est $\mathbb{F}$-adapté.

La tribu $\mathcal{F}_t$ représente les informations accessibles avant ou jusqu'à la date $t \geq 0$. On observe alors en t si le temps d'arrêt τ est plus petit ou plus grand par rapport à t. Cela dit, si τ est un $\mathbb{F}$ temps d'arrêt, on possède comme l'information en t si le défaut a eu lieu ou non et la date éventuelle de défaut.

Lemme 2.1.2 *Si $\mathbb{F}$ est continue à droite, alors τ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt si et seulement si $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$.*

Démonstration. Si τ est un temps d'arrêt, alors $\{\tau < t\} = \cup_{s<t, s\in\mathbb{Q}}\{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_t$. Si $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$, alors $\{\tau \leq t\} = \cap_{\varepsilon>0}\{\tau < t+\varepsilon\} \in \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \mathcal{F}_{t+}$. Comme $\mathbb{F}$ est continue à droite, $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$, donc τ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt. □

Etant donné un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt τ, on peut définir la tribu

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{A} :\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0\}.$$

Par définition, une variable aléatoire Z est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable si et seulement si $Z1_{\{\tau \leq t\}}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \geq 0$.

Proposition 2.1.3 *Tout $\mathbb{F}$-temps d'arrêt τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable. En outre, si A est un ensemble dans $\mathcal{F}_\tau$, alors $\tau|_A := \tau 1_A + (+\infty)1_{A^c}$ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt.*

Démonstration. On a $\tau 1_{\{\tau\leq t\}} = (\tau \wedge t)1_{\{\tau \leq t\}}$. Comme τ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, $\tau \wedge t$ et $1_{\{\tau\leq t\}}$ sont $\mathcal{F}_t$-mesurable, alors il en est de même de $\tau 1_{\{\tau\leq t\}}$. Donc τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable. Pour montrer la deuxième assertion, il suffit d'observer que

$$\{\tau|_A \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap A \in \mathcal{F}_t.$$

□

On considère plusieurs temps d'arrêt, et en particulier, on s'intéresse a leurs minimum et maximum. Pour le premier résultat dans le lemme suivant, le cas maximum peut être généralisé à une famille dénombrable de temps d'arrêt et le cas minimum à une famille finie de temps d'arrêt.

Proposition 2.1.4 *Soient τ et σ deux $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, alors*

1) $\tau \wedge \sigma$ et $\tau \vee \sigma$ sont encore des $\mathbb{F}$-temps d'arrêt ;

2) $\mathcal{F}_\sigma \cap \{\sigma \leq \tau\} \subset \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$.

Démonstration. 1) On note que $1 - 1_{\{\tau\wedge\sigma\leq t\}} = 1_{\{\tau\wedge\sigma>t\}} = 1_{\{\tau>t\}}1_{\{\sigma>t\}}$. Donc

$$D^{\tau\wedge\sigma} = 1 - (1 - D^\tau)(1 - D^\sigma) \tag{2.1}$$

est $\mathbb{F}$-adapté. Similairement,

$$D^{\tau\vee\sigma} = D^\tau D^\sigma \tag{2.2}$$

est aussi $\mathbb{F}$-adapté. On obtient donc 1).
2) Soient $A \in \mathcal{F}_\sigma$ et $t \geq 0$, on a

$$A \cap \{\sigma \leq \tau\} \cap \{\tau \leq t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cap \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \wedge t \leq \tau \wedge t\},$$

qui est dans $\mathcal{F}_t$ comme $\tau \wedge t$ et $\sigma \wedge t$ sont $\mathcal{F}_t$-mesurables. Donc

$$\mathcal{F}_\sigma \cap \{\sigma \leq \tau\} \subset \mathcal{F}_\tau.$$

On obtient la première assertion en remplaçant τ par $\sigma \wedge \tau$. Pour montrer la deuxième égalité, on remplace d'abord le pair (σ, τ) par $(\sigma \wedge \tau, \sigma)$ et $(\sigma \wedge \tau, \tau)$ pour obtenir $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$. Pour l'inclusion inverse, on remarque que pour tout $A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ et tout $t \geq 0$,

$$A \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cup (A \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

donc $A \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$. □

2.2 Temps d'arrêt et temps prévisible

La *tribu optionnelle*, noté par $\mathcal{O}_\mathbb{F}$, est la tribu sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ engendrée par tout processus qui est continue à droite et admet une limite à gauche (càdlàg) et $\mathbb{F}$-adapté. Un processus ou un ensemble est dit $\mathbb{F}$-*optionnel* s'il est $\mathcal{O}_\mathbb{F}$-mesurable.

Remarque 2.2.1 Le processus $(D_t^\tau = 1_{\{\tau \leq t\}}, t \geq 0)$ est càdlàg, de plus, il est $\mathbb{F}$-adapté si et seulement si τ est un temps d'arrêt. Dans ce cas-là, D^τ est un processus $\mathbb{F}$-optionnel. Un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt est aussi appelé un $\mathbb{F}$-temps optionnel.

La *tribu prévisible*, notée $\mathcal{P}_\mathbb{F}$, est la tribu sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ engendrée par tout processus continu à gauche (càg) et $\mathbb{F}$-adapté. Un processus ou un ensemble est dit $\mathbb{F}$-*prévisible* s'il est $\mathcal{P}_\mathbb{F}$-mesurable. Un temps aléatoire τ est dit $\mathbb{F}$-*prévisible* si le processus D^τ est prévisible. [1] Un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt τ est dit *totalement inaccessible* si $\mathbb{P}(\tau = \sigma) = 0$ pour tout temps $\mathbb{F}$-prévisible σ. D'après la proposition 2.2.2 au-dessous, tout $\mathbb{F}$-temps prévisible est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt.

Proposition 2.2.2 *Tout processus càg et adapté est optionnel. On a $\mathcal{P}_\mathbb{F} \subset \mathcal{O}_\mathbb{F}$.*

1. Si $\mathbb{F}$ satisfait les conditions usuelles, il existe une définition équivalente pour les temps prévisibles : un temps d'arrêt est dit prévisible s'il existe une suite de temps arrêt $(\tau_n)_{n\geq 1}$ tel que τ_n est croissant, $\tau_n < \tau$ et $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$ p.s..

Démonstration. La deuxième assertion est une conséquence immédiate de la première. Soit X un processus càg. Pour tout entier $n > 1$, on note

$$X_t^{(n)} = \sum_{k \geq 0} X_{k/2^n} 1_{[k/2^n,(k+1)/2^n[}(t), \quad t \geq 0.$$

Le processus $X^{(n)}$ est continu à droite et $\mathbb{F}$-adapté, donc est $\mathbb{F}$-optionnel. Comme X est la limite des $X^{(n)}$, le processus X est également $\mathbb{F}$-optionnel. □

On peut donner une caractérisation de la tribu optionnelle ou prévisible en utilisant les *intervalles stochastiques.* Soient τ et σ deux $\mathbb{F}$-temps d'arrêts, on définit

$$[\![\tau, \sigma]\!] = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : \tau(\omega) \leq t \leq \sigma(\omega)\}$$

et similairement $[\![\tau, \sigma[\![$, $]\!]\tau, \sigma[\![$, $]\!]\tau, \sigma]\!]$. On utilise $[\![\tau]\!]$ pour désigner $[\![\tau, \tau]\!]$ et on l'appele la *graphe* de τ. Par la proposition 2.2.2, tout intervalle stochastique est un ensemble optionnel.

Proposition 2.2.3 *La tribu $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ est engendrée par les intervalles stochastiques $[\![0, \tau[\![$ où τ est tout $\mathbb{F}$-temps d'arrêt.*

Démonstration. On désigne par $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}^*$ la tribu engendrée par les intervalles stochastiques de la forme $[\![0, \tau[\![$, où τ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt. Pour tout temps d'arrêt τ, l'indicatrice de l'intervalle stochastique $[\![0, \tau[\![$ est un processus adapté et càdlàg. Par conséquent, tout intervalle stochastique de la forme $[\![0, \tau[\![$ est dans la tribu $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$.

Considérons maintenant un processus X qui est adpaté et càdlàg, on va montrer qu'il est $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}^*$-mesurable. Soit $n > 0$ un entier. On construit une suite de temps aléatoires $(\tau_k^{(n)})_{0 \leq k \leq n}$ par

$$\tau_0^{(n)} = 0, \quad \tau_{k+1}^{(n)} = \inf\{s > \tau_k^{(n)} \ : \ \max(|X_s - X_{\tau_k^{(n)}}|, |X_{s-} - X_{\tau_k^{(n)}}|) \geq 1/n\}.$$

Il s'avère que $\tau_{k+1}^{(n)}(\omega) \leq t$ si et seulement si, pour tout $m \geq 1$, il existe $r \in (\mathbb{Q} \cap [0, t]) \cup \{t\}$ tel que $\tau_k^{(n)}(\omega) \leq r$ et $|X_{\tau_k^{(n)}(\omega)}(\omega) 1_{\{\tau_k^{(n)}(\omega) < +\infty\}} - X_r(\omega)| \geq (1 - 1/n)(1/m)$. Autrement dit, on a

$$\{\tau_{k+1}^{(n)} \leq t\} = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \cap [0,t] \\ \text{ou } r = t}} \Big(\{\tau_k^{(n)} \leq r\} \cap \{|X_{\tau_k^{(n)}} 1_{\{\tau_k^{(n)} < \infty\}} - X_r| \geq (1/n - 1/mn)\}\Big).$$

On montre par récurrence que les $\tau_k^{(n)}$ sont des temps d'arrêt. Cela est évident lorsque $k = 0$. Si $\tau_k^{(n)}$ est un temps d'arrêt, par le lemme précédent, la variable aléatoire $X_{\tau_k^{(n)}} 1_{\{\tau_k^{(n)} < +\infty\}}$ est $\mathcal{F}_{\tau_k^{(n)}}$-mesurable. En outre, X étant $\mathbb{F}$-adapté, X_r est $\mathcal{F}_r$-mesurable. On en déduit que

$$\{\tau_k^{(n)} \leq r\} \cap \{|X_{\tau_k^{(n)}} 1_{\{\tau_k^{(n)} < \infty\}} - X_r| \geq (1/n - 1/mn)\} \in \mathcal{F}_r.$$

Cela montre que $\{\tau_{k+1}^{(n)} \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et donc $\tau_{k+1}^{(n)}$ est un temps d'arrêt.
Soit

$$X^{(n)} = \sum_{k\geq 0} X_{\tau_k^{(n)}} 1_{[\![\tau_k^{(n)},\tau_{k+1}^{(n)}[\![}.$$

Si A est un ensemble dans $\mathcal{F}_{\tau_k^{(n)}}$, on a

$$1_A(\omega)1_{[\![\tau_k^{(n)},\tau_{k+1}^{(n)}[\![} = 1_{[\![\tau_k^{(n)}|_A,\tau_{k+1}^{(n)}|_A[\![},$$

d'où $X_{\tau_k^{(n)}} 1_{[\![\tau_k^{(n)},\tau_{k+1}^{(n)}[\![}$ et donc $X^{(n)}$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}^*$-mesurable. Comme X est la limite des $X^{(n)}$ (car il est càdlàg), on obtient que X est $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}^*$-mesurable. □

Proposition 2.2.4 *La tribu $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ est engendrée par chacune des deux familles d'ensembles suivantes :*
(1) $A \times \{0\}$ où $A \in \mathcal{F}_0$ et $A\times]s,t]$ où $A \in \mathcal{F}_s$ et $s < t$.
(2) $A\times\{0\}$ où $A \in \mathcal{F}_0$ et les intervalles stochastiques $[\![0,\tau]\!]$ où τ est tout $\mathbb{F}$-temps d'arrêt ;

Démonstration. D'abord ces deux familles sont toutes contenues dans $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$: pour tout ensemble dans ces deux familles, le processus associé est continu à gauche et adapté.

Soit X un processus càg. Pour tout entier $n > 0$, soit

$$X_t^{(n)} = X_0 + \sum_{k\geq 1} X_{k/2^n} 1_{]k/2^n,(k+1)/2^n]}(t), \qquad t \geq 0.$$

Le processus $X^{(n)}$ est certainement mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{P}_{(1)}$ engendrée par la famille (1). Comme X est la limite de $X^{(n)}$, on obtient que X est $\mathcal{P}_{(1)}$-mesurable. Notons que $1_{A\times]s,t]} = 1_{A\times]s,\infty[} - 1_{A\times]t,\infty[}$. Comme $1_{A\times]s,\infty[} = 1_{]\!]s|_A,\infty[\![}$, où

$$s|_A(\omega) = s1_A(\omega) + (+\infty)1_{A^c}(\omega)$$

est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt (voir la proposition 2.1.3), on obtient que la famille (1) est contenue dans la tribu engendrée par la famille (2). □

Proposition 2.2.5 *1) Si τ est un $\mathbb{F}$-temps prévisible, alors $[\![\tau]\!] \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}$.*
2) Si τ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt et $[\![\tau]\!] \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}$, alors τ est un $\mathbb{F}$-temps prévisible.

Démonstration. Cela repose sur l'égalité $[\![\tau]\!] = [\![0,\tau]\!] \setminus [\![0,\tau[\![$. On a $[\![0,\tau]\!] \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ si τ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt par la proposition 2.2.4, donc $[\![\tau]\!] \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ si et seulement si τ est un temps prévisible. □

Corollaire 2.2.6 *Soient τ et σ deux $\mathbb{F}$-temps prévisibles. Alors $\tau\wedge\sigma$ et $\tau\vee\sigma$ sont encore des $\mathbb{F}$-temps prévisibles.*

Démonstration. On a $[\![0,\tau\wedge\sigma[\![= [\![0,\tau[\![\cap[\![0,\sigma[\![$ et $[\![0,\tau\vee\sigma[\![= [\![0,\tau[\![\cup[\![0,\sigma[\![$. La proposition 2.2.5 implique alors le corollaire. □

2.3 Martingales

Dans cette section, on présente quelques propriétés de martingales qui sont liées aux temps d'arrêt. Soient X un processus et τ un temps d'arrêt. Le processus X^τ définie par $X_t^\tau = X_{t\wedge\tau}$ est un *processus arrêté en* τ.

On appelle $\mathbb{F}$-*martingale* (resp. *sous-martingale, sur-martingale*) tout processus $\mathbb{F}$-adapté M qui vérifie les conditions suivantes :

1) pour tout t, la variable aléatoire M_t est intégrable,

2) pour $s \leq t$, on a $M_s = \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]$ (resp. $M_s \leq \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]$, $M_s \geq \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]$) p.s..

Soit X une $\mathbb{F}$-sous-martingale. Si φ est une fonction convexe telle que $\varphi(X_t)$ est intégrable pour tout t, alors $\varphi(X)$ est aussi une $\mathbb{F}$-sous-martingale. En particulier, $|X|$ et $(X-b)^+$ ($b \in \mathbb{R}$) où $x^+ = \max(x, 0)$ sont des sous-martingales. C'est une conséquence de l'inégalité de Jensen.

Un processus adapté M est une *martingale locale* s'il existe une suite de temps d'arrêt τ_n croissant qui tends vers l'infini p.s. telle que $(M_{t\wedge\tau_n}, t \geq 0)$ soit une martingale. Une martingale est évidemment une martingale locale. Par contre, une martingale locale (même si elle est intégrable) n'est pas nécessairement une martingale.

Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille de variable aléatoire intégrable, où I est un ensemble d'indices. On dit que cette famille est *uniformément intégrable* si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\alpha\in I} \mathbb{E}[|X_\alpha| 1_{\{|X_\alpha|\geq n\}}] = 0.$$

On dit qu'une martingale M est *fermée à l'infini* s'il existe une variable aléatoire intégrable M_∞ tel que $M_t = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_t]$ p.s. quel que soit $t \geq 0$. La condition d'intégrabilité uniforme d'une martingale implique qu'elle est fermée à l'infini (voir le théorème 2.4.5 en Appendix). Dans certains théorèmes de convergence, cette condition remplace l'hypothèse de domination.

Théorème 2.3.1 (Théorème d'arrêt optionnel de Doob) *Soient M une martingale càd et $\tau \leq \sigma$ deux temps d'arrêt bornés, alors on a*

$$M_\tau = \mathbb{E}[M_\sigma|\mathcal{F}_\tau] \quad p.s. \tag{2.3}$$

Si de plus la martingale M est uniformément intégrable, l'égalité (2.3) *reste vraie sans supposer que σ et τ soient bornés.*

Démonstration. La première assertion est une conséquence de la second. Montrons la seconde. D'après le théorème 2.4.5, M est fermée à l'infini. Soit $\mathbb{T}$ l'ensemble de tous les temps d'arrêt qui prennent valeur dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrons un résultat auxiliaire suivant :

$$\forall\, \tau \in \mathbb{T}, \quad \mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]. \tag{2.4}$$

Supposons que τ prenne valeure dans $\{0 = t_1 < \cdots < t_d\}$. On a

$$\begin{aligned}
M_\tau &= \sum_{1\le i\le d} 1_{\{\tau = t_i\}} M_{t_i} = \sum_{1\le i<d} (1_{\{\tau\ge t_i\}} - 1_{\{\tau\ge t_{i+1}\}}) M_{t_i} + 1_{\{\tau\ge t_d\}} M_{t_d} \\
&= \sum_{1\le i\le d} 1_{\{\tau\ge t_i\}} M_{t_i} - \sum_{1<i\le d} 1_{\{\tau\ge t_i\}} M_{t_{i-1}} = M_0 - \sum_{1<i\le d} 1_{\{\tau\ge t_i\}} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}}).
\end{aligned}$$

Comme $\{\tau \ge t_i\} = \{\tau \le t_{i-1}\}^c$ est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable et comme M est une martingale, on obtient (2.4).

L'égalité (2.4) permet d'établir le résultat dans le cas particulier où τ et σ sont dans $\mathbb{T}$. Soit A un sous-ensemble de $\mathcal{F}_\tau$. Posons $\tau|_A := \tau 1_A + (+\infty)1_{A^c}$ et $\sigma|_A := \sigma 1_A + (+\infty)1_{A^c}$. Ce sont des temps d'arrêts (voir la proposition 2.1.3). L'égalité (2.4) appliquée à $\tau|_A$ et $\sigma|A$ donne

$$\mathbb{E}[M_\tau 1_A] + \mathbb{E}[M_\infty 1_{A^c}] = \mathbb{E}[M_{\tau^A}] = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_\sigma 1_A] + \mathbb{E}[M_\infty 1_{A^c}],$$

d'où $M_\tau = \mathbb{E}[M_\sigma|\mathcal{F}_\tau]$.

Le cas général repose sur la continuité à droite de X. Sans perte de généralité, il suffit de montrer que $\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_\tau] = X_\tau$ p.s. pour tout temps d'arrêt τ. Il existe une suite décroissante $(\tau_k)_{k\ge 1}$ de temps d'arrêt dans $\mathbb{T}$ qui converge vers τ. On peut prendre par exemple

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i}{2^n} 1_{(i-1)/2^n \le \tau < i/2^n} + (+\infty) 1_{\tau\ge n}.$$

La suite M_{τ_k} converge p.s. vers M_τ. Comme la famille $M_{\tau_k} = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_{\tau_k}]$ est uniformément intégrable, on a $M_\tau = \lim_{k\to\infty} M_{\tau_k}$ dans L^1. D'où

$$M_\tau = \mathbb{E}[\lim_{k\to\infty} M_{\tau_k}|\mathcal{F}_\tau] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[M_{\tau_k}|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_\tau].$$

□

Il y a une version du théorème 2.3.1 pour les sous-martingales (resp. sur-martingales), il suffit de remplacer (2.3) par une égalité $M_\tau \le \mathbb{E}[M_\sigma|\mathcal{F}_\tau]$ (resp. $M_\tau \ge \mathbb{E}[M_\sigma|\mathcal{F}_\tau]$) p.s.. Ci-dessous est un critère des martingales.

Proposition 2.3.2 *Soit X un processus càdlàg et $\mathbb{F}$-adapté. Alors X est une martingale si et seulement si, pour tout temps d'arrêt borné τ, la variable aléatoire X_τ est intégrable et on a $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.*

Démonstration. La nécessité provient du théorème d'arrêt de Doob (le théorème 2.3.1). Montrons la suffisance. Soient $s < t$ deux nombres réels, et $A \in \mathcal{F}_s$. La variable aléatoire $\tau = t1_{A^c} + s1_A$ est un temps d'arrêt. Donc on a

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_t 1_{A^c}] + \mathbb{E}[X_s 1_A].$$

Or, t lui-même peut être considéré comme un temps d'arrêt, d'où

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_t 1_{A^c}] + \mathbb{E}[X_t 1_A].$$

Par conséquent, on a $\mathbb{E}[(X_t - X_s)1_A] = 0$. Comme A est arbitraire, on obtient $X_s = \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$. La condition de integrabilité est satisfaite car t est un temps d'arrêt. Donc X est une $\mathbb{F}$-martingale. $\square$

Proposition 2.3.3 *Soient M une martingale càd et τ un temps d'arrêt, alors la martingale arrêtée $(M_t^\tau = M_{t\wedge\tau}, t \geq 0)$ est une martingale càd. Si de plus M est uniformément intégrable, alors M^τ l'est aussi.*

Démonstration. Le processus arrêté M^τ est nécessairement continu à droite. D'après la proposition 2.3.2, il suffit de vérifier que $\mathbb{E}[M_\sigma^\tau] = \mathbb{E}[M_0^\tau]$ pour tout temps d'arrêt borné. Or $M_\sigma^\tau = M_{\tau\wedge\sigma}$, où $\tau \wedge \sigma$ est un temps d'arrêt borné. Encore d'après la proposition 2.3.2, on a $\mathbb{E}[M_\sigma^\tau] = \mathbb{E}[M_{\tau\wedge\sigma}] = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_0^\tau]$. $\square$

2.4 Appendix

2.4.1 Théorème d'arrêt de Doob

Dans ce paragraphe, on présente des résultats qui sont preparatoires ou liés au théorème d'arrêt de Doob 2.3.1. On commence par discuter la version continue à droite de (sur-, sous-)martingales où l'inégalité “upcrossing” de Doob joue un rôle très important.

Soient $F = \{t_1 < \cdots < t_d\}$ une famille finie dans $\mathbb{R}_+$ et f une application définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$ contenant F et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soient $a < b$ deux entiers. On définit par récurrence une suite $(s_n)_{n\geq 1}$ comme la suite

$$s_1 := \inf\{t_i \,:\, f(t_i) > b\}, \qquad s_2 := \inf\{t_i > s_1 \,:\, f(t_i) < a\}$$
$$s_{2n+1} := \inf\{t_i > s_{2n} \,:\, f(t_i) > b\}, \qquad s_{2n+2} := \inf\{t_i > s_{2n+1} \,:\, f(t_i) < a\},$$

où $\inf \emptyset = t_d$ par convention. On pose

$$D_a^b(f, F) := \sup\{n \,:\, s_{2n} < t_d\}.$$

Si $\mathcal{T}$ est une famille dans $\mathbb{R}_+$ et si f est une fonction définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$ contenant $\mathcal{T}$ et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on note

$$D_a^b(f, \mathcal{T}) := \sup_{\substack{F \subset \mathcal{T} \\ F \text{ fini}}} D_a^b(f, F).$$

Lemme 2.4.1 *(Doob) Soient X une sous-martingale et $\mathcal{T}$ une famille dénombrable dans $\mathbb{R}_+$. Pour tous $a < b$, on a*

$$(b - a)\mathbb{E}[D_a^b(X, \mathcal{T})] \leq \sup_{t\in\mathcal{T}} \mathbb{E}[(X_t - b)_+]. \tag{2.5}$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer $\mathcal{T}$ fini, soit $\mathcal{T} = \{t_1 < \cdots < t_d\}$. Cela nous permet d'utiliser les notations s_k introduites au-dessus (ici les s_k sont des variables aléatoires). Posons $A_k = \{s_k < t_d\}$. La suite $(A_k)_{k\geq 1}$ est décroissante. Par défintiion, on a $X_{s_{2n-1}} > b$ sur A_{2n-1} et $X_{s_{2n}} < a$ sur A_{2n}. Donc on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}[1_{A_{2n-1}}(X_{s_{2n-1}} - b)] \leq \mathbb{E}[1_{A_{2n-1}}(X_{s_{2n}} - b)] \\ &\leq (a-b)\mathbb{P}(A_{2n}) + \mathbb{E}[1_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}(X_{s_{2n}} - b)]. \end{aligned}$$

Or on a $s_{2n} = t_d$ sur A_{2n}^c, donc

$$(b-a)\mathbb{P}(A_{2n}) \leq \mathbb{E}[1_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}(X_{s_{2n}} - b)_+] = \mathbb{E}[1_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}}(X_{t_d} - b)_+].$$

Comme $A_{2n} = \{D_a^b(X,T) \geq n\}$, quitte à prendre la somme par rapport à n, on obtient

$$(b-a)\mathbb{E}[D_a^b(X,\mathcal{T})] \leq \mathbb{E}[(X_{t_d} - b)_+].$$

C'est ce qu'il faut démontrer (la fonction $x \mapsto (x-b)_+$ étant convexe, par l'inégalité de Jensen, la fonction $t \mapsto \mathbb{E}[(X_t - b)_+]$ est croissante). □

Théorème 2.4.2 *Soit X une $\mathbb{F}$-sous-martingale. Pour presque tout $\omega \in \Omega$, $\lim_{r\uparrow t, r\in\mathbb{Q}} X_r(\omega)$ existe pour $t \in]0,+\infty[$ et $\lim_{r\downarrow t, r\in\mathbb{Q}}$ existe pour $t \in [0,+\infty[$.*

Démonstration. Soit I un intervalle fermé et borné dont la borne supérieure t_d vérifie $t_d > t$. Soit $a < b$ deux réels. On a $\mathbb{E}[(X_t - b)_+] \leq \mathbb{E}[(X_{t_d} - b)_+] < +\infty$ pour tout $t \in I$. Par conséquent, il existe un ensemble Z de mesure nulle tel que $D_a^b(X, I\cap\mathbb{Q}) < +\infty$ sur Z^c quels que soient $a, b \in \mathbb{Q}$ avec $a < b$. Par le lemme de Fatou, on a

$$\mathbb{E}[\liminf_{r\uparrow t, r\in I\cap\mathbb{Q}} X_r] \leq \liminf_{r\uparrow t, r\in I\cap\mathbb{Q}} \mathbb{E}[X_r] < +\infty,$$

d'où $\liminf_{r\uparrow t, r\in I\cap\mathbb{Q}} X_r < +\infty$ p.s. Si $\liminf_{r\uparrow t, r\in I\cap\mathbb{Q}} X_r(\omega)$ n'existe pas, alors il existe des nombres rationels a et b tels que

$$\liminf_{r\uparrow t, r\in I\cap\mathbb{Q}} X_r(\omega) < a < b < \limsup_{r\uparrow t, r\in I\cap\mathbb{Q}} X_r(\omega).$$

Cela montre que $D_a^b(X(\omega), I\cap\mathbb{Q}) < +\infty$ et donc $\omega \in Z$. La preuve de l'existence de la seconde limite est identique. □

Remarque 2.4.3 Soit X un processus. On définit

$$X_{t+} := \limsup_{r\downarrow t, r\in\mathbb{Q}} X_r \ (t \geq 0), \quad X_{t-} := \limsup_{r\uparrow t, r\in\mathbb{Q}} X_r \ (t > 0).$$

On désigne par X_+ et X_- les processus correspondant (en posant $X_{0-} := X_0$ par convention). Il s'avère que X_- est un processus $\mathbb{F}$-adapté. Ce n'est pas vrai en général pour X_+. Mais si la filtration $\mathbb{F}$ est continue à droite, alors X_+ est adapté.

D'après le théorème précédent, si X est une sous-martingale, alors les limites supérieures au-dessus sont p.s. des limites. On suppose que la filtration $\mathbb{F}$ soit usuelle. Soit X un $\mathbb{F}$-sous-martingale telle que la fonction $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ soit continue à droite (cela est vérifié notammement lorsque X est une martingale). Il existe alors une modification[2] $\widetilde{X}$ de X qui est càdlàg et est une $\mathbb{F}$-sous-martingale. On peut prendre par exemple (avec la notation de la démonstration du théorème)

$$\widetilde{X} := 1_{Z^c \times \mathbb{R}_+} X_+.$$

Ce processus est appelé une *version càdlàg* de X.

Théorème 2.4.4 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui est uniformément intégrable. Si X_n convergent p.s. vers une variable aléatoire X, alors X est intégrable et la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vers X.*

Théorème 2.4.5 *Soit X une sous-martingale càd. Si $\sup_t \mathbb{E}[X_t^+] < +\infty$, alors X_t convergent p.s. vers une variable aléatoire X_∞ quand t tends vers l'infini. Si de plus la famille $(X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable, alors $\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty$ dans L^1.*

Démonstration. Comme le processus X est continue à droite, l'inégalité (2.5) s'étend sur $\mathbb{R}_+$: on a

$$(b-a)\mathbb{E}[D_a^b(X, \mathbb{R}_+)] \leq \sup_t \mathbb{E}[(X_t - b)_+].$$

Par un argument similaire à la démonstration du théorème 2.4.2, on obtient la première assertion. La deuxième assertion est une conséquence de la première et du théorème 2.4.4. □

2. i.e., pour tout t, on a $\widetilde{X}_t = X_t$ p.s.