Chapitre 3

Grossissement de filtration progressif

Dans la modélisation du risque de crédit, on distingue souvent l'information sur le marché "sans défaut" répresentée par une filtration de référence $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, et l'information du défaut. En général, le temps de défaut τ n'est pas nécessairement un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt. L'information globale contient ces deux types d'informations, obtenue par un grossissement de filtration en terme mathématique. On suppose qu'un investisseur observe à la date t, en outre que l'information contenue en $\mathcal{F}_t$, si le défaut a eu lieu ou non et le temps éventuelle du défaut au cas positif, cette information est répresentée par la tribu $\sigma(\tau \wedge t)$ ou de façon équivalente, par $\sigma(1_{\{\tau\leq s\}}, s \leq t)$.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ qui satisfait les conditions usuelles et τ une variable aléatoire $\mathcal{A}$-mesurable à valeur dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On introduit la filtration $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t\geq 0}$ par

$$\mathcal{D}_t = \mathcal{D}^0_{t+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{D}^0_{t+\varepsilon}, \quad \mathcal{D}^0_t = \sigma(\tau \wedge t). \tag{3.1}$$

Alors $\mathbb{D}$ est la plus petite filtration continue à droite telle que τ est un $\mathbb{D}$-temps d'arrêt. On définit

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{D}_t \tag{3.2}$$

et on appelle $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ le *grossissement progressif* de $\mathbb{F}$ par le temps aléatoire τ, qui est la plus petite filtration continue à droite contenant $\mathbb{F}$ et faisant τ un $\mathbb{G}$-temps d'arrêt et répresente l'information globale du marché.

La théorie de grossissement de filtration a été introduite et développée par l'école française de probabilités dans les années 70-80, voir par exemple [7, 6, 3, 8, 9]. Le grossissement progressif est ensuite appliqué à la modélisation de risque de crédit vers la fin des années 90 dans une série de papiers [5, 2, 1]. Pour étudier les produits financiers sensibles au risque de défaut, par exemple, pour le problème de pricing (4.1), on doit prendre compte de l'information dans $\mathcal{G}_t$ définie par (3.2).

3.1 Espérances conditionelles

Les calculs des espérances conditionelles par rapport à la filtration $\mathbb{G}$ sont essentiels pour évaluer des produits dérivés qui sont sensibles au risque de défaut.

Lemme 3.1.1 *Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et Y_t une variable aléatoire $\mathcal{G}_t$-mesurable, alors il existe des variables aléatoires $\bar{Y}_t$ et $\widetilde{Y}_t(\cdot)$ respectivement $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurables et telles que*

$$Y_t = 1_{\{\tau > t\}} \bar{Y}_t + 1_{\{\tau \le t\}} \widetilde{Y}_t(\tau). \tag{3.3}$$

Démonstration. Par définition de $\mathcal{G}_t$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout entier $m > 0$, la variable aléatoire Y_t est $\mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau \wedge (t + 1/m))$-mesurable. Donc il existe une fonction F^m qui est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$-mesurable telle que

$$Y_t = F_t^m(\tau \wedge (t + 1/m)).$$

Alors, sur $\{\tau \le t\}$, on a $1_{\{\tau \le t\}} Y_t = 1_{\{\tau \le t\}} F_t^m(\tau)$. Sur $\{\tau > t\}$, on a $1_{\{\tau > t\}} Y_t = 1_{\{\tau > t\}} F_t^m(\tau \wedge (t + 1/m))$, donc pour ω fixé et m assez grand, on obtient $1_{\{\tau > t\}} Y_t = 1_{\{\tau > t\}} F_t^m(t + 1/m)$. En prenant

$$\bar{Y}_t = \limsup_{m \to \infty} F_t^m(t + 1/m) \;\text{ et }\; \widetilde{Y}_t = \limsup_{m \to \infty} F_t^m(\tau),$$

le lemme est demontré. □

On a également le variant suivante du lemme 3.1.1.

Lemme 3.1.2 *Toute variable aléatoire $\mathcal{G}_{t-}$-mesurable Y_t peut être écrite sous la forme*

$$Y_t = 1_{\{\tau \ge t\}} \bar{Y}_t + 1_{\{\tau < t\}} \widetilde{Y}_t(\tau)$$

où Y_t et $Y_t(\cdot)$ sont respectivement $\mathcal{F}_{t-}$ et $\mathcal{F}_{t-} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurables.

Démonstration. Pour tout $t > 0$, $\mathcal{G}_{t-} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t-\varepsilon} \vee \sigma(\tau \wedge (t - \varepsilon))$. Donc il existe $m > 0$ tel que Y_t est $\mathcal{F}_{t-} \otimes \sigma(\tau \wedge (t - 1/m))$-mesurable et Y_t peut être écrite comme $F_t^m(\tau \wedge (t - 1/m))$ où F^m est une fonction $\mathcal{F}_{t-} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$-mesurable. Similaire que dans la preuve du lemme 3.1.1, on a $1_{\{\tau \ge t\}} Y_t = 1_{\{\tau \ge t\}} F_t^m(t - 1/m)$ et pour ω fixé et m assez grand $1_{\{\tau < t\}} Y_t = 1_{\{\tau < t\}} F_t^m(\tau)$. On définit alors $\bar{Y}_t = \limsup_{m \to \infty} F_t^m(t - 1/m)$ et $\widetilde{Y}_t = \limsup_{m \to \infty} F_t^m(\tau)$ et obtient le lemme. □

On peut calculer les $\mathbb{G}$-espérances conditionelles sur l'ensemble $\{\tau > t\}$ en utilisant le fait qu'une variable aléatoire $\mathcal{G}_t$-mesurable coincide avec une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable sur $\{\tau > t\}$.

Proposition 3.1.3 *Soit Y une variable aléatoire $\mathcal{A}$-mesurable. Si $\mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t) > 0$ pour tout $t \geq 0$, alors*

$$1_{\{\tau>t\}}\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}_t] = 1_{\{\tau>t\}}\frac{\mathbb{E}[Y1_{\{\tau>t\}}|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t)}. \tag{3.4}$$

Démonstration. Par le lemme 3.1.1, il existe une variable aléatoire $Y_t^{\mathbb{F}}$ qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable telle que

$$1_{\{\tau>t\}}\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}_t] = 1_{\{\tau>t\}}Y_t^{\mathbb{F}}.$$

En prenant l'espérance conditionelle de légalité précédente par rapport à $\mathcal{F}_t$, on obtient

$$\mathbb{E}[1_{\{\tau>t\}}Y|\mathcal{F}_t] = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t)Y_t^{\mathbb{F}},$$

d'où vient (3.4). □

On désigne par $S_t := \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t)$. On note [1] que $\{\tau > t\} \subset \{S_t > 0\}$, p.s.. Le processus S joue un rôle important dans la suite. Il est une $\mathbb{F}$-surmartingale, appelée la surmartingale Azéma de τ et on prendra sa version càdlàg.

Corollaire 3.1.4 *Pour tous $T \geq t \geq 0$, on a*

$$\mathbb{P}(\tau > T|\mathcal{G}_t) = 1_{\{\tau>t\}}\frac{\mathbb{E}[S_T|\mathcal{F}_t]}{S_t}.$$

Proposition 3.1.5 *On suppose que S est de variation finie.*

1) Soit h une fonction borélienne bornée ou positive, alors pour $T \geq t \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[1_{\{t<\tau\leq T\}}h(\tau)|\mathcal{G}_t] = -1_{\{\tau>t\}}\frac{\mathbb{E}[\int_{]t,T]}h(u)dS_u|\mathcal{F}_t]}{S_t}$$

2) Soit Z un processus $\mathbb{F}$-prévisible borné ou positif, alors

$$\mathbb{E}[1_{\{t<\tau\leq T\}}Z_\tau|\mathcal{G}_t] = -1_{\{\tau>t\}}\frac{\mathbb{E}[\int_{]t,T]}Z_u dS_u|\mathcal{F}_t]}{S_t} \tag{3.5}$$

Démonstration. 1) Par la proposition 3.1.3, il suffit de vérifier que

$$\mathbb{E}[1_{\{t<\tau\leq T\}}h(\tau)|\mathcal{F}_t] = -\mathbb{E}[\int_{]t,T]}h(u)dS_u|\mathcal{F}_t].$$

1. $A \subset B$ p.s. $\Longleftrightarrow 1_A \leq 1_B$ p.s..

On considère une fonction d'escalier de la forme $h(u) = \sum_{i=0}^n h_i 1_{]t_i,t_{i+1}]}(u)$ où $h_i \in \mathbb{R}$ et $t = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = T$. Alors

$$\mathbb{E}[1_{\{t<\tau\leq T\}}h(\tau)|\mathcal{F}_t] = \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[h_i 1_{\{t_i<\tau\leq t_{i+1}\}}|\mathcal{F}_t]$$

$$= \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[h_i \mathbb{E}[1_{\{t_i<\tau\}}|\mathcal{F}_{t_i}]|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[h_i \mathbb{E}[1_{\{t_{i+1}<\tau\}}|\mathcal{F}_{t_{i+1}}]|\mathcal{F}_t]$$

$$= \mathbb{E}\big[\sum_{i=0}^n h_i(S_{t_i} - S_{t_{i+1}})|\mathcal{F}_t\big] = \mathbb{E}\big[-\sum_{i=0}^n \int_{]t_i,t_{i+1}]} h(u)dS_u|\mathcal{F}_t\big] = -\mathbb{E}[\int_{]t,T]} h(u)dS_u|\mathcal{F}_t].$$

Comme toute fonction borélienne s'écrit comme la limite d'une suite de fonctions d'escalier, on obtien 1).
2) La preuve est similaire que 1). Il suffit de considérer le processus de la forme $Z_s = \sum_{i=0}^n 1_{]t_i,t_{i+1}]}(s)Z_{t_i}$ où Z_{t_i} est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable. On utilise alors le procédure similaire pour démontrer 2). □

Les espérances conditionelles sur l'ensemble $\{\tau \leq t\}$ sont importantes pour étudier les impacts d'un événement de défaut passé. Pour effectuer des calculs explicits, on a besoin d'une hypothèse supplémentaire.

Hypothèse 3.1.6 Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la loi conditionelle de τ sachant $\mathcal{F}_t$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. En d'auatre terme, il existe une fonction $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable $\alpha_t(u)$ telle que pour toute fonction borélienne f,

$$\mathbb{E}[f(\tau)|\mathcal{F}_t] = \int_0^\infty f(u)\alpha_t(u)du, \quad p.s.. \tag{3.6}$$

La famille $\alpha(\cdot)$ est appellée la densité conditionnelle de τ par rapport à $\mathbb{F}$ (ou la *densité* de τ s'il n'y pas d'ambiguité). On a

$$\mathbb{P}(\tau > T|\mathcal{F}_t) = \int_T^\infty \alpha_t(u)du, \quad \forall T \geq 0.$$

Notons que pour tout $u \geq 0$, $(\alpha_t(u), t \geq 0)$ est une $\mathbb{F}$-martingale.

Proposition 3.1.7 *Sous l'hypothèse 3.1.6, le temps aléatoire τ évite tout $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, c-à-d, $\mathbb{P}(\tau = \xi) = 0$ pour tout $\mathbb{F}$-temps d'arrêt ξ.*

Démonstration. Soit ξ un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt bornée par une constante T. Alors la variable aléatoire $H_\xi(t) = 1_{\{\xi=t\}}$ est $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable et on a

$$\mathbb{E}[H_\xi(\tau)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[H_\xi(\tau)|\mathcal{F}_T]|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}\big[\int_0^\infty H_\xi(u)\alpha_T(u)du|\mathcal{F}_t\big] = 0.$$

Donc $\mathbb{E}[H_\xi(\tau)] = \mathbb{P}(\xi = \tau) = 0$. □

Proposition 3.1.8 *Soient $T \in \mathbb{R}_+$ et $Y_T(\tau)$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable positive. Alors pour tout $0 \leq t \leq T$,*

$$\mathbb{E}[Y_T(\tau)|\mathcal{G}_t]1_{\{\tau \leq t\}} = 1_{\{\tau \leq t\}} \frac{\mathbb{E}[Y_T(\theta)\alpha_T(\theta)|\mathcal{F}_t]}{\alpha_t(\theta)}\Big|_{\theta=\tau} \quad p.s..$$

Démonstration. Par Lemma 3.1.1, il existe une variable aléatoire $\widetilde{Y}_t(\theta)$ qui est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable telle que $\mathbb{E}[Y_T(\tau)|\mathcal{G}_t]1_{\{\tau \leq t\}} = \widetilde{Y}_t(\tau)1_{\{\tau \leq t\}}$. En outre, toute variable aléatoire $\mathcal{G}_t$-mesurable s'écrit sous la forme $H_t(\tau)1_{\{\tau \leq t\}}$ sur $\{\tau \leq t\}$. Soit $H_t(\tau)$ une variable aléaoire de test positive, on a

$$\mathbb{E}[H_t(\tau)1_{\{\tau \leq t\}}Y_T(\tau)] = \mathbb{E}[H_t(\tau)1_{\{\tau \leq t\}}\widetilde{Y}_t(\tau)].$$

En utilisant la densité,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H_t(\tau)1_{\{\tau \leq t\}}Y_T(\tau)] &= \int_0^\infty \mathbb{E}[H_t(\theta)1_{\{\theta \leq t\}}Y_T(\theta)\alpha_T(\theta)]d\theta \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}[H_t(\theta)1_{\{\theta \leq t\}}\mathbb{E}[Y_T(\theta)\alpha_T(\theta)|\mathcal{F}_t]]d\theta
\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}[H_t(\tau)1_{\{\tau \leq t\}}\widetilde{Y}_t(\tau)] = \int_0^\infty \mathbb{E}[H_t(\theta)1_{\{\theta \leq t\}}\widetilde{Y}_t(\theta)\alpha_t(\theta)]d\theta.$$

Comme $H_t(\theta)$ est arbitraire, on obtient

$$\widetilde{Y}_t(\theta)\alpha_t(\theta) = \mathbb{E}[Y_T(\theta)\alpha_T(\theta)|\mathcal{F}_t],$$

ce qui permet de conclure la preuve. □

3.2 Compensateur et intensité

On introduit dans cette section les notions de compensateur et d'intensité, qui fournissent la base théorique de l'approche d'intensité dans la modélisation de défaut.

Définition 3.2.1 Soit τ un $\mathbb{G}$-temps d'arrêt. Le $\mathbb{G}$-*compensateur* de τ est le processsus prévisible croissant $\Lambda^{\mathbb{G}}$ tel que $(N_t := 1_{\{\tau \leq t\}} - \Lambda_t^{\mathbb{G}}, t \geq 0)$ est une $\mathbb{G}$-martingale. Si $\Lambda^{\mathbb{G}}$ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, alors le processus $\mathbb{G}$-adapté et positif $\lambda^{\mathbb{G}}$ tel que $\Lambda_t^{\mathbb{G}} = \int_0^t \lambda_s^{\mathbb{G}} ds$ est appelé la $\mathbb{G}$-*intensité* de τ.

Proposition 3.2.2 *Le $\mathbb{G}$-compensateur $\Lambda^{\mathbb{G}}$ est arrêté en τ, c-à-d, $\Lambda_t^{\mathbb{G}} = \Lambda_{t\wedge\tau}^{\mathbb{G}}$ p.s..*

Démonstration. Comme τ est un $\mathbb{G}$-temps d'arrêt, le processus arrêté $(N_{t\wedge\tau}, t \geq 0)$ est aussi une $\mathbb{G}$-martingale. On note que $N_{t\wedge\tau} = 1_{\{\tau \leq t\}} - \Lambda_{t\wedge\tau}^{\mathbb{G}}$, donc $\Lambda_t^{\mathbb{G}} = \Lambda_{t\wedge\tau}^{\mathbb{G}}$ p.s.. □

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 3.2.3 *Si l'intensité* $\lambda^{\mathbb{G}}$ *de* τ *existe, alors* $\lambda^{\mathbb{G}}_t = 0$ *p.s. sur* $\{t \geq \tau\}$.

Le lemme suivant est une généralisation de Lemmes 3.1.1 et 3.1.2. On rappelle que $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ et $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ désignent respectivement la tribu optionnelle et prévisible sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$.

Lemme 3.2.4 *1) Tout processus* $\mathbb{G}$*-optionnel* Y *peut s'écrire sous la forme* $Y_t = 1_{\{\tau > t\}}\bar{Y}_t + 1_{\{\tau \leq t\}}\widetilde{Y}_t(\tau)$ *où* $\bar{Y}$ *et* $\widetilde{Y}(\cdot)$ *sont des processus respectivement* $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ *et* $\mathcal{O}_{\mathbb{F}} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$*-mesurables.*

2) Tout processus $\mathbb{G}$*-prévisible* Y *peut s'écrire sous la forme* $Y_t = 1_{\{\tau \geq t\}}\bar{Y}_t + 1_{\{\tau < t\}}\widetilde{Y}_t(\tau)$ *où* $\bar{Y}$ *et* $\widetilde{Y}(\cdot)$ *sont des processus respectivement* $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ *et* $\mathcal{P}_{\mathbb{F}} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$*-mesurables.*

Démonstration. 1) Il suffit de considérer $Y = Z 1_{[\![s,\infty [\![}$ où Z est une variable aléatoire $\mathcal{G}_s$-mesurable. Par le lemme 3.1.1, $Z = 1_{\{\tau > s\}}\bar{Z} + 1_{\{\tau \leq s\}}\widetilde{Z}(\tau)$ où $\bar{Z}$ et $\widetilde{Z}(\cdot)$ sont $\mathcal{F}_s-$ et $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurables. On a

$$\begin{aligned} Y_t = Z 1_{\{t \geq s\}} &= (1_{\{\tau > s\}}\bar{Z} + 1_{\{\tau \leq s\}}\widetilde{Z}(\tau))1_{\{t \geq s\}} \\ &= 1_{\{\tau > t\}}(1_{\{t \geq s\}}\bar{Z}) + 1_{\{\tau \leq t\}}(1_{\{s < \tau\}}\bar{Z} + 1_{\{\tau \leq s \leq t\}}\widetilde{Z}(\tau)). \end{aligned}$$

Posons $\bar{Y} = \bar{Z}1_{[\![s,\infty [\![}$ et $\widetilde{Y}(\theta) = 1_{\{s < \theta\}}\bar{Z} + 1_{\{s \geq \theta\}}\widetilde{Z}(\theta)1_{[\![s,\infty [\![}$. Ce sont respectivement des fonctions $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$- et $\mathcal{O}_{\mathbb{F}} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurables, et on a $Y = \bar{Y}1_{[\![0,\tau [\![} + \widetilde{Y}(\tau)1_{[\![\tau,\infty [\![}$. Le résultat est donc démontré.

2) La démonstration, qui utilise le lemme 3.1.2, est très similaire à celle de 1). On la laisse comme un exercice. □

Par le lemme 3.2.4, il existe un processus $\mathbb{F}$-prévisible $\Lambda^{\mathbb{F}}$ tel que $\Lambda^{\mathbb{G}}$ et $\Lambda^{\mathbb{F}}$ coïncident sur l'ensemble $\{\tau \geq t\}$. On appelle $\Lambda^{\mathbb{F}}$ le $\mathbb{F}$-compensateur de τ. Si $\Lambda^{\mathbb{F}}$ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, c-à-d, il existe un processus $\mathbb{F}$-adapté $\lambda^{\mathbb{F}}$ tel que $\Lambda^{\mathbb{F}}_t = \int_0^t \lambda^{\mathbb{F}}_s ds$, on appelle $\lambda^{\mathbb{F}}$ la $\mathbb{F}$-intensité de τ.

On peut calculer explicitement les compensateurs en utilisant le processus S.

Théorème 3.2.5 *Soit* $S = M - A$ *la décomposition Doob-Meyer de la surmartingale* S*,* M *étant la* $\mathbb{F}$*-martingale et* A *étant le processus* $\mathbb{F}$*-prévisible croissant. Alors*

$$\Lambda^{\mathbb{G}}_t = 1_{\{\tau \geq t\}}\Lambda^{\mathbb{F}}_t = \int_{]0,t]} 1_{\{\tau \geq u\}} \frac{dA_u}{S_{u-}}. \tag{3.7}$$

Démonstration. On va montrer que $(Z_t := 1_{\{\tau \leq t\}} - \int_{]0,t]} 1_{\{\tau \geq u\}} \frac{dA_u}{S_{u-}}, t \geq 0)$ est une $\mathbb{G}$-martingale. D'un coté,

$$\mathbb{E}[1_{\{\tau \leq t\}} - 1_{\{\tau \leq T\}}|\mathcal{G}_t] = 1_{\{\tau > t\}}\big(\frac{\mathbb{E}[S_T|\mathcal{F}_t]}{S_t} - 1\big).$$

De l'autre coté,

$$\mathbb{E}\Big[\int_{]t,T]} 1_{\{\tau\geq u\}}\frac{dA_u}{S_{u-}}|\mathcal{G}_t\Big] = \frac{1_{\{\tau>t\}}}{S_t}\mathbb{E}\Big[\int_{]t,T]} 1_{\{\tau\geq u\}}\frac{dA_u}{S_{u-}}|\mathcal{F}_t\Big]$$
$$= \frac{1_{\{\tau>t\}}}{S_t}\mathbb{E}\Big[\int_t^T \mathbb{E}[1_{\{\tau\geq u\}}|\mathcal{F}_u]\frac{dA_u}{S_{u-}}|\mathcal{F}_t\Big] = \frac{1_{\{\tau>t\}}}{S_t}\mathbb{E}\big[A_T - A_t|\mathcal{F}_t\big].$$

Comme $S = M - A$ et M est une $\mathbb{F}$-martingale, on obtient $\mathbb{E}[Z_T - Z_t|\mathcal{G}_t] = 0$. □

Sous l'hypothèse de densité 3.1.6, la surmartingale S admet une decomposition explicite de Doob-Meyer, qui implique alors une formule explicite de l'intensité.

Proposition 3.2.6 *On suppose l'hypothèse de densité 3.1.6.*
1) $(M_t^S := S_t + \int_0^t \alpha_s(s)ds, t\geq 0)$ *est une* $\mathbb{F}$*-martingale.*
2) Soit $\zeta := \inf\{t : S_{t-} = 0\}$*. On définie* $\lambda_t^{\mathbb{F}} := \frac{\alpha_t(t)}{S_{t-}}$ *sur* $\{t<\zeta\}$ *et* $\lambda_t^{\mathbb{F}} := \lambda_\zeta^{\mathbb{F}}$ *sur* $\{t\geq\zeta\}$*. Alors* $(L_t^S := S_t e^{-\int_0^t \lambda_s^{\mathbb{F}} ds}, t\geq 0)$ *est une* $\mathbb{F}$*-martingale locale.*
3) Le processus défini par

$$\lambda_t^{\mathbb{G}} = 1_{\{\tau>t\}}\lambda_t^{\mathbb{F}} = 1_{\{\tau>t\}}\frac{\alpha_t(t)}{S_t}$$

est une $\mathbb{G}$*-intensité de* τ*.*

Démonstration. 1) Par la définition de la densité et sa propriété de martingale, on a

$$\mathbb{E}[S_T - S_t|\mathcal{F}_t] = -\int_t^T \alpha_t(s)ds = -\mathbb{E}\Big[\int_t^T \alpha_s(s)ds|\mathcal{F}_t\Big].$$

Donc $S_t + \int_0^t \alpha_s(s)ds = \mathbb{E}[\int_0^\infty \alpha_s(s)ds|\mathcal{F}_t]$ est une $\mathbb{F}$-martingale carré intégrable car

$$\mathbb{E}\Big[\big(\int_0^\infty \alpha_s(s)ds\big)^2\Big] = 2\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty \alpha_s(s)ds\int_s^\infty \alpha_u(u)du\Big] = 2\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty S_s\alpha_s(s)ds\Big] \leq 2.$$

2) On obtient par l'intégration par partie et 1) que

$$dL_t^S = e^{\int_0^t \lambda_s^{\mathbb{F}}ds}dS_t + e^{\int_0^t \lambda_s^{\mathbb{F}}ds}\lambda_t^{\mathbb{F}}S_t dt = e^{\int_0^t \lambda_s^{\mathbb{F}}ds}dM_t^S.$$

3) est une consqéquence du théorème 3.2.5 et 1). On note que l'hypothèse de densité nous permet de choisir $\alpha_t(t)/S_t$ au lieu de $\alpha_t(t)/S_{t-}$ car $\int_0^t \alpha_s(s)/S_s ds = \int_0^t \alpha_s(s)/S_{s-}ds$. □

Proposition 3.2.7 *Si l'intensité de* τ *existe, alors* τ *est un* $\mathbb{G}$*-temps d'arrêt totalement inaccessible.*

Démonstration. Soit σ un $\mathbb{G}$-temps prévisible, le processus H défini par $H_t = 1_{\{\sigma=t\}}$ est prévisible. On a

$$\mathbb{P}(\sigma=\tau) = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty H_t d1_{\{\tau\leq t\}}\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty H_t d\Lambda_t^{\mathbb{G}}\Big].$$

Si $\Lambda^{\mathbb{G}}$ est abolument continu, alors $\mathbb{P}(\sigma=\tau)=0$. □

3.3 Décomposition de $\mathbb{F}$-martingale

Pour évaluer les produits dérivés de crédit, c'est important d'étudier les probabilités risque-neutre, c-à-d, les mesures de probabilités sous lequelles les prix actualisé d'un produit financier est une martingale. Dans un marché classique sans défaut, il s'agit des $\mathbb{F}$-martingales, quand on incorpore le risque de défaut et les informations associées, on s'intéresse alors aux $\mathbb{G}$-martingales. Il est donc naturel de se demander si les prix actualisés d'un produit qui n'est pas lié au défaut dans le marché classique reste encore une martingale dans le marché élargi.

En général, une $\mathbb{F}$-martingale n'est pas une $\mathbb{G}$-martingale. On cherche une probabilité équivalente $\mathbb{Q}$ telle qu'une $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-martingale (locale) reste une $(\mathbb{G}, \mathbb{Q})$-martingale (locale). On va étudier ce problème en deux étapes : premièrement, on considère la décomposition d'une $\mathbb{F}$-martingale (locale) comme une $\mathbb{G}$-semimartingale sous la même probabilité $\mathbb{P}$, ensuite dans la section suivante, on s'intéresse au changement de probabilités.

Etant donné un $\mathbb{G}$-temps d'arrêt τ, tout processus Y peut être décomposé comme une somme de deux parties : un processus arrêté en τ et l'autre qui commence en τ, c-à-d,

$$Y_t = Y_{t\wedge\tau} + (Y_t - Y_\tau)1_{\{\tau\leq t\}}, \quad t \geq 0. \tag{3.8}$$

Le résultat suivant montre qu'une $\mathbb{F}$-martingale arrêtée en τ est une $\mathbb{G}$-semimartingale.

Proposition 3.3.1 *Soit M une $\mathbb{F}$-martingale locale. Alors $(M_{t\wedge\tau}, t \geq 0)$ est une $\mathbb{G}$-semimartingale et $(M_{t\wedge\tau} - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{S_{u-}} d\left\langle M, M^S\right\rangle_u, t \geq 0)$ est une $\mathbb{G}$-martingale où $S = M^S - A^S$ est la décomposition Doob-Meyer de la surmartingale S, et le crochet oblique $\langle M, M^S\rangle$ désigne le compensateur de la variation quadratique $[M, M^S]$.*

Démonstration. □

On a besoin des hypothèses supplementaires pour qu'une $\mathbb{F}$-martingale locale soit une $\mathbb{G}$-semimartingale. Dans la suite de cette section, on va supposer l'hypothèse de densité 3.1.6 et on commence par donner une caractérisation pour les $\mathbb{G}$-martingales locales.

Proposition 3.3.2 *Un processus càdlàg Y est une $\mathbb{G}$-martingale locale si et seulement s'il existe un processus càdlàg $\mathbb{F}$-adapté $\overline{Y}$ et un processus $\mathcal{O}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$-mesurable $\widetilde{Y}_t(.)$ tels que*

$$Y_t = \overline{Y}_t 1_{\{\tau>t\}} + \widetilde{Y}_t(\tau)1_{\{\tau\leq t\}}$$

et que
1) $(U_t := \overline{Y}_t S_t + \int_0^t \widetilde{Y}_s(s)\alpha_s(s)ds,\ t \geq 0)$ ou de façon equivalente, $(L_t^S(\overline{Y}_t + \int_0^t (\widetilde{Y}_s(s) - \overline{Y}_s)\lambda_s^{\mathbb{F}} ds), t \geq 0)$ est une $\mathbb{F}$-martingale locale ;
2) pour tout $\theta > 0$, $(\widetilde{Y}_t(\theta)\alpha_t(\theta), t \geq \theta)$ est une $\mathbb{F}$-martingale locale.

Démonstration. Si Y est une $\mathbb{G}$-martingale locale, comme τ est un $\mathbb{G}$-temps d'arrêt, alors dans la décomposition (3.8), le processus arrêté $(Y_{t\wedge\tau}, t \geq 0)$ et leur différence sont

également des $\mathbb{G}$-martingales locales. On va montrer que les conditions 1) et 2) sont respectivement des condition de caractérisation pour des martingales arrêtées en τ et celles qui commencent en τ.
1) L'espérance conditionelle de $Y_{t\wedge\tau} = \overline{Y}_t 1_{\{\tau>t\}} + \widetilde{Y}_\tau(\tau)1_{\{\tau\leq t\}}$ sachant $\mathcal{F}_t$ est une martingale locale $Y^{\tau,\mathbb{F}}$ donnée en utilisant la densié par

$$Y_t^{\tau,\mathbb{F}} = \mathbb{E}[Y_{t\wedge\tau}|\mathcal{F}_t] = \overline{Y}_t S_t + \int_0^t \widetilde{Y}_s(s)\alpha_t(s)ds.$$

On a donc $Y_t^{\tau,\mathbb{F}} - U_t = \int_0^t Y_s(s)(\alpha_t(s) - \alpha_s(s))ds$. Soit $u < t$, par le fait que $(\alpha_t(s), t \geq 0)$ est une $\mathbb{F}$-martingale, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_t^{\tau,\mathbb{F}} - U_t|\mathcal{F}_u] &= \mathbb{E}[\int_0^u Y_s(s)(\alpha_t(s) - \alpha_s(s))ds|\mathcal{F}_u] + \mathbb{E}[\int_u^t Y_s(s)(\alpha_t(s) - \alpha_s(s))ds|\mathcal{F}_u]\\ &= \int_0^u Y_s(s)(\alpha_u(s) - \alpha_s(s))ds,\end{aligned}$$

alors $Y^{\tau,\mathbb{F}} - U$ et donc U est une $\mathbb{F}$-martingale locale. Inversement, on suppose que U est une $\mathbb{F}$-martingale locale, alors pour tous $t > u$,

$$\mathbb{E}[\overline{Y}_t S_t + \int_u^t \widetilde{Y}_s(s)\alpha_s(s)ds|\mathcal{F}_u] = \overline{Y}_u S_u.$$

Donc on a par la proposition 3.1.3

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_{t\wedge\tau}|\mathcal{G}_u] &= \mathbb{E}[\overline{Y}_t 1_{\{\tau>t\}} + \widetilde{Y}_\tau(\tau)1_{\{\tau\leq t\}}|\mathcal{G}_u]\\ &= 1_{\{\tau>u\}}\frac{1}{S_u}\Big(\mathbb{E}[\overline{Y}_t S_t + \int_u^t \widetilde{Y}_s(s)\alpha_u(s)|\mathcal{F}_u]\Big) + 1_{\{\tau\leq u\}}\widetilde{Y}_\tau(\tau)\\ &= 1_{\{\tau>u\}}\overline{Y}_u + 1_{\{\tau\leq u\}}\widetilde{Y}_\tau(\tau) = Y_{u\wedge\tau}.\end{aligned}$$

La seconde formulation est basée sur la décomposition multiplicative $L_t^S = S_t e^{\Lambda_t^{\mathbb{F}}}$ par la proposition 3.2.6 où $\Lambda_t^{\mathbb{F}} = \int_0^t \lambda_s^{\mathbb{F}} ds$ est un processus continu et croissant. Donc

$$\begin{aligned}d(\overline{Y}_t L_t^S) &= d(\overline{Y}_t S_t e^{\Lambda_t^{\mathbb{F}}}) = e^{\Lambda_t^{\mathbb{F}}} d(\overline{Y}_t S_t) + e^{\Lambda_t^{\mathbb{F}}}\overline{Y}_t S_t \lambda_t^{\mathbb{F}} dt\\ &= e^{\Lambda_t^{\mathbb{F}}} dU_t + (\overline{Y}_t - \widetilde{Y}_t(t))\lambda_t^{\mathbb{F}} L_t^S dt,\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de $\alpha_t(t) = \lambda_t^{\mathbb{F}} S_t$. La propriété martingale de U est equivalente à celle de $(\overline{Y}_t L_t^S - \int_0^t (\overline{Y}_s - \widetilde{Y}_s(s))\lambda_s^{\mathbb{F}} L_s^S ds, t \geq 0)$, et à la deuxième condition.
2) On considère maintenant la condition de caractérisation pour $Y_t^d := (Y_t - Y_\tau)1_{\{\tau\leq t\}} = (\widetilde{Y}_t(\tau) - \widetilde{Y}_\tau(\tau))1_{\{\tau\leq t\}}$. Soit $u < t$, on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[(\widetilde{Y}_t(\tau) - \widetilde{Y}_\tau(\tau))1_{\{\tau\leq t\}}|\mathcal{G}_u]\\ &= 1_{\{u<\tau\}}\frac{1}{S_u}\mathbb{E}[\int_u^t (\widetilde{Y}_t(s) - \widetilde{Y}_s(s))\alpha_t(s)ds|\mathcal{F}_u] + 1_{\{\tau\leq u\}}\frac{1}{\alpha_u(\tau)}\mathbb{E}[(\widetilde{Y}_t(\theta) - \widetilde{Y}_\theta(\theta))\alpha_t(\theta)|\mathcal{F}_u]|_{\theta=\tau}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Si $(Y^d_t, t \geq 0)$ est une $\mathbb{G}$-martingale, $\mathbb{E}[(\widetilde{Y}_t(\tau) - \widetilde{Y}_\tau(\tau))1_{\{\tau \leq t\}} | \mathcal{G}_u] = (\widetilde{Y}_u(\tau) - \widetilde{Y}_\tau(\tau))1_{\{\tau \leq u\}}$, ce qui implique que $(\widetilde{Y}_t(\theta)\alpha_t(\theta), t \geq \theta)$ est une $\mathbb{F}$-martingale. Le réciproque est également vrai. □

Proposition 3.3.3 *On suppose l'hypothèse de densité 3.1.6. Toute $\mathbb{F}$-martingale M est une $\mathbb{G}$-semimartingale qui peut être écrite sous la forme $M_t = L^{\mathbb{G}}_t + A^{\mathbb{G}}_t$ où $(L^{\mathbb{G}}_t, t \geq 0)$ est une $\mathbb{G}$-martingale locale et $(A^{\mathbb{G}}_t := \overline{A}_t 1_{\{\tau \geq t\}} + \widetilde{A}_t(\tau)1_{\{\tau < t\}}, t \geq 0)$ est un processus $\mathbb{F}$-prévisible à variation finie avec*

$$\overline{A}_t = \int_0^t \frac{d\langle M, S\rangle_u}{S_{u-}} \quad et \quad \widetilde{A}_t(\theta) = \int_\theta^t \frac{d\langle M, \alpha(\theta)\rangle_u}{\alpha_{u-}(\theta)} + \overline{A}_\theta. \tag{3.10}$$

Démonstration. Si on suppose que la $\mathbb{F}$-martingale M est une $\mathbb{G}$-semimartingale, elle peut être décomposé comme la somme d'une $\mathbb{G}$-martingale locale et un processus $\mathbb{G}$-prévisible à variation finie qui peut être écrite par le lemme 3.1.1 comme $A^{\mathbb{G}} = \overline{A}_t 1_{\{\tau \geq t\}} + \widetilde{A}_t(\tau)1_{\{\tau < t\}}$ où $\overline{A}_t$ et $\widetilde{A}_t(\cdot)$ sont respectivement $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ et $\mathcal{P}_{\mathbb{F}} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurables.. On va vérifier par la proposition 3.3.2 que $(M - A^{\mathbb{G}} = (M_t - \overline{A}_t)1_{\{\tau > t\}} + (M_t - \widetilde{A}_t(\tau) - \overline{A}_\tau)1_{\{\tau \leq t\}}, t \geq 0)$ est une $\mathbb{G}$-martingale locale.

Comme τ évite $\mathbb{F}$-temps d'arrêt (voir la proposition 3.1.7), la $\mathbb{F}$-martingale M n'admet pas de saut en τ, on peut alors choisir $L^{\mathbb{G}}$ tel que $L^{\mathbb{G}}$ et $A^{\mathbb{G}}$ n'ont pas de saut en τ. Par la proposition 3.3.2, on va considérer les deux processus

$$(L^S_t(M_t - \overline{A}_t), t \geq 0) \ \text{ et } \ (\alpha_t(\theta)(M_t - \widetilde{A}_t(\theta)), t \geq \theta).$$

Pour le premier, on a

$$\begin{aligned} &d\big(L^S_t(M_t - \overline{A}_t)\big) = L^S_{t-}d(M_t - \overline{A}_t) + (M_{t-} - \overline{A}_{t-})dL^S_t + d[L^S, M]_t \\ &= L_{t-}dM_t + (M_{t-} - \overline{A}_{t-})dL^S_t + d([L^S, M]_t - \langle L^S, M\rangle_t) - L^S_{t-}d\overline{A}_t + d\langle L^S, M\rangle_t. \end{aligned}$$

Comme L^S est le produit de S et un processus continue et croissant $e^{\Lambda^{\mathbb{F}}}$, on a

$$\frac{d\langle M, L^S\rangle_t}{L^S_{t-}} = \frac{d\langle M, S\rangle_t}{S_{t-}}.$$

Si $\overline{A}$ satisfait la première égalité de (3.10), alors $(L^S_t(M - \overline{A}_t), t \geq 0)$ est une $\mathbb{F}$-martingale locale. De façon similaire, si $\widetilde{A}(\theta)$ satisfait la deuxième égalité de (3.10), alors $(\alpha_t(\theta)(M_t - \widetilde{A}_t(\theta)), t \geq \theta)$ est une $\mathbb{F}$-martingale locale. Donc $M - A^{\mathbb{G}}$ est une $\mathbb{G}$-martingale locale et M est une $\mathbb{G}$-semimartingale. □

Corollaire 3.3.4 *Soit W un $\mathbb{F}$-mouvement brownien. Alors,*

$$W^{\mathbb{G}}_t = W_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle W, S\rangle_u}{S_{u-}} - \int_{t\wedge\tau}^t \frac{d\langle W, \alpha(\tau)\rangle_u}{\alpha_{u-}(\tau)}, \quad t \geq 0 \tag{3.11}$$

est un $\mathbb{G}$-mouvement brownien.

3.4 Changement de probabilités

On étudie les changements de probabilités avec la filtration élargie $\mathbb{G}$.

Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On dit que $\mathbb{P}$ est *absolument continue* par rapport $\mathbb{Q}$, désigné par $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$, si pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{Q}(A) = 0$ implique que $\mathbb{P}(A) = 0$. On dit que $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont *équivalentes*, désigné par $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$, si $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Si $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, il existe une variable aléatoire $Z \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, unique $\mathbb{P}$-p.p., telle que

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z] = 1.$$

Soit $Z_t = \mathbb{E}[Z|\mathcal{G}_t]$. Alors $(Z_t, t \geq 0)$ est une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale uniformément intégrable. Si $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, alors $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q})$ et $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = (\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})^{-1}$.

Lemme 3.4.1 *Soient $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ et $Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}_t]$. Un processus càdlàg et $\mathbb{G}$-adapté $(M_t, t \geq 0)$ est une $(\mathbb{G}, \mathbb{Q})$-martingale (locale) si et seulement si $(M_t Z_t, t \geq 0)$ est une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale (locale).*

Démonstration. Comme $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$ sont équivalentes, il suffit de montrer la nécessité. Supposons que $(M_t Z_t, t \geq 0)$ soit une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale. Comme $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|M_t|] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|M_t|Z_t]$, donc M est intégrable sous Q. Soient $0 < s < t$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M_t|\mathcal{G}_s] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_t Z_t|\mathcal{G}_s]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_t|\mathcal{G}_s]} = M_s.$$

Donc $(M_t, t \geq 0)$ est une $(\mathbb{G}, \mathbb{Q})$-martingale. Le cas de martingales locales est montré par un procédure de localisation. Supposons que $(M_t Z_t, t \geq 0)$ soit une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale locale, il existe une suite de $\mathbb{G}$-temps d'arrêt $\tau_n \to \infty$ $\mathbb{P}$-p.s. telle que $(M_{t\wedge\tau_n} Z_{t\wedge\tau_n}, t \geq 0)$ soit une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale. On va montrer que $(M_{t\wedge\tau_n}, t \geq 0)$ est une $(\mathbb{G}, \mathbb{Q})$-martingale. Pour $0 < s < t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{G}_s] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_{\{\tau_n > s\}} M_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{G}_s] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_{\{\tau_n \leq s\}} M_{\tau_n}|\mathcal{G}_s] \\
&= 1_{\{\tau_n > s\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_{t\wedge\tau_n} M_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{G}_s]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{G}_s]} + 1_{\{\tau_n \leq s\}} M_{\tau_n} \\
&= 1_{\{\tau_n > s\}} M_{s\wedge\tau_n} + 1_{\{\tau_n \leq s\}} M_{\tau_n} = M_{s\wedge\tau_n}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.4.2 *Soit M une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale locale. Soit $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ et $Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}_t]$. Alors*

$$(M_t^{\mathbb{Q}} := M_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[M, Z]_s, t \geq 0) \tag{3.12}$$

est une $(\mathbb{G}, \mathbb{Q})$-martingale locale où $[M, Z]$ désigne la covariation quadratique de M et Z.

Démonstration. Par le lemme 3.4.1, on va montrer que $(M_t^{\mathbb{Q}} Z_t, t \geq 0)$ est une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale locale. Par l'intégration par partie,

$$d(Z_t M_t) = Z_{t-} dM_t + M_{t-} dZ_t + d[Z, M]_t,$$

comme $(Z_t, t \geq 0)$ et $(M_t, t \geq 0)$ sont des $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingales locales, $(Z_t M_t - [Z, M]_t, t \geq 0)$ est une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale locale. Il suffit de montrer que $([Z, M]_t - Z_t \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[Z, M]_s, t \geq 0)$ est aussi une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale locale. On désigne par $A_t = \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[Z, M]_s$, $(A_t, t \geq 0)$ est un processus à variation finie. Comme

$$\begin{aligned} d(Z_t A_t) &= Z_{t-} dA_t + A_{t-} dZ_t + \Delta Z_t \Delta A_t \\ &= Z_t dA_t + A_{t-} dZ_t = d[Z, M]_t + A_{t-} dZ_t, \end{aligned}$$

on a que $([Z, M]_t - Z_t A_t, t \geq 0)$ est effectivement une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale locale. □

On présente également un variant du théorème 3.4.2.

Proposition 3.4.3 *Soit M une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale locale. Soit $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ et $Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} | \mathcal{G}_t]$. Si $\langle M, Z \rangle$ exists sous $\mathbb{P}$, alors*

$$(M_t^{\mathbb{Q}} := M_t - \int_0^t \frac{1}{Z_{s-}} d \langle M, Z \rangle_s, t \geq 0) \tag{3.13}$$

est une $(\mathbb{G}, \mathbb{Q})$-martingale locale où $\langle M, Z \rangle$ désigne le compensateur de $[M, Z]$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle de théorème 3.4.2. On va montrer que $(L_t = Z_t(M_t - A_t), t \geq 0)$ est une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale locale où $A_t = \int_0^t \frac{1}{Z_{s-}} d \langle M, Z \rangle_s$. Comme

$$dL_t = Z_{t-} dM_t + M_{t-} dZ_t + d[Z, M]_t - d \langle Z, M \rangle_t - A_t dZ_t,$$

M et Z sont des $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale locale et $[Z, M] - \langle Z, M \rangle$ est aussi une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale locale, on obtient le lemme. □

On considère un cas particulier de la proposition 3.4.3 pour le mouvement brownien. On rappelle que $(N_t = 1_{\{\tau \leq t\}} - \Lambda_t^{\mathbb{G}}, t \geq 0)$ est une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale.

Corollaire 3.4.4 *Soit $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$. On suppose que la densité Radon-Nikodym $Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} | \mathcal{G}_t]$ satisfaite l'équation différentielle stochastique*

$$dZ_t = Z_{t-}(\beta_t dW_t^{\mathbb{G}} + \kappa_t dN_t), \quad Z_0 = 1$$

où $W^{\mathbb{G}}$ est un $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-mouvement brownien, $N_t = 1_{\{\tau \leq t\}} - \Lambda_t^{\mathbb{G}}$, β et κ sont des processus $\mathbb{G}$-prévisible. Alors $(W_t^{\mathbb{G}, \mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{G}} - \int_0^t \beta_s ds, t \geq 0)$ est un $(\mathbb{G}, \mathbb{Q})$-mouvement brownien et $(N_t^{\mathbb{Q}} = N_t - \int_0^t \kappa_s d\Lambda_s^{\mathbb{G}}, t \geq 0)$ est une $(\mathbb{G}, \mathbb{Q})$-martingale.

Démonstration. On applique la proposition 3.4.3. On a $d\left\langle W^{\mathbb{G}}, Z\right\rangle_t = \left\langle dW_t^{\mathbb{G}}, Z_{t-}\beta_t dW_t^{\mathbb{G}}\right\rangle = Z_{t-}\beta_t dt$. De plus, comme $d[N,Z]_t = Z_{t-}\kappa_t d1_{\{\tau\leq t\}}$, on a $d\left\langle N, Z\right\rangle_t = Z_{t-}\kappa_t d\Lambda_t^{\mathbb{G}}$, d'où vient le corollaire. □

On considère maintenant un $(\mathbb{F},\mathbb{P})$-mouvement brownien W. Sous l'hypothèse de densité, on introduit le $(\mathbb{G},\mathbb{P})$-mouvement brownien $W^{\mathbb{G}}$ par le corollaire 3.3.4 comme $W_t^{\mathbb{G}} = W_t - A_t^{W,\mathbb{G}}$ où

$$A_t^{W,\mathbb{G}} = \int_0^t 1_{\{u\leq\tau\}}\frac{d\langle W, M^S\rangle_u}{S_{u-}} + 1_{\{u>\tau\}}\frac{d\langle W, \alpha(\tau)\rangle_u}{\alpha_{u-}(\tau)}. \tag{3.14}$$

On effectue ensuite un changement de probabilité comme dans le corollaire 3.4.4 et obtient le mouvement brownien sous la probabilité $\mathbb{Q}$

$$W_t^{\mathbb{G},\mathbb{Q}} = W_t - A_t^{W,\mathbb{G}} - \int_0^t \beta_s ds.$$

Si

$$A_t^{W,\mathbb{G}} + \int_0^t \beta_s ds = 0, \tag{3.15}$$

alors le $(\mathbb{F},\mathbb{P})$-mouvement brownien W est un $(\mathbb{G},\mathbb{Q})$-mouvement brownien. On donne un exemple dans la suite.

Proposition 3.4.5 *Soit W un $(\mathbb{F},\mathbb{P})$-mouvement brownien. On suppose que la probabilité de survie $S_t(\theta) = \mathbb{P}(\tau > \theta|\mathcal{F}_t)$ admet une représentation de martingale*

$$S_t(\theta) = \Gamma_t(\theta)dW_t, \quad t\geq 0, \theta\geq 0$$

où pour tout $\theta \geq 0$, $(\Gamma_t(\theta), t\geq 0)$ est un processus $\mathbb{F}$-adapté tel que $\Gamma_t(0) = 0$ et qu'il existe une famille de processus $(\gamma_t(\theta), t \geq 0)$ satisfaisant $\Gamma_t(\theta) = \int_0^\theta \gamma_t(u)du$. On utilise la notation du corollaire 3.4.4, soit

$$\beta_t = -1_{\{t\leq\tau\}}\frac{\Gamma_t(t)}{S_{t-}} + 1_{\{t>\tau\}}\frac{\gamma_t(\tau)}{\alpha_{t-}(\tau)}, \tag{3.16}$$

alors W est un $(\mathbb{G},\mathbb{Q})$-mouvement brownien.

Démonstration. Par le théorème de Fubini stochastique, on a

$$S_t(\theta) = S_0(\theta) + \int_0^t \Gamma_u(\theta)dW_u = S_0(\theta) + \int_0^\theta dv\int_0^t \gamma_u(v)dW_u.$$

Donc $d\alpha_t(\theta) = -\int_0^t \gamma_u(v)dW_u$. La partie martingale dans la décomposition Doob-Meyer de S est donnée par

$$\begin{aligned} M_t^S &= S_t + \int_0^t \alpha_u(u)du = 1 - \int_0^t (\alpha_t(u) - \alpha_u(u))du = 1 + \int_0^t du\int_u^t \gamma_s(u)dW_s \\ &= 1 + \int_0^t dW_s\int_0^s \gamma_s(u)du = 1 + \int_0^t \Gamma_s(s)dW_s. \end{aligned}$$

Donc $A^{W,\mathbb{G}}$ défini dans (3.14) est donné par

$$A_t^{W,\mathbb{G}} = \int_0^t 1_{\{u \leq \tau\}} \frac{\Gamma_u(u)}{S_{u-}} du - 1_{\{u > \tau\}} \frac{\gamma_u(\tau)}{\alpha_{u-}(\tau)} du,$$

d'où vient (3.16) pour que $A_t^{W,\mathbb{G}} + \int_0^t \beta_s ds = 0$. $\square$