Chapitre 4

Modèles structurels

4.1 Modèle de Merton

L'idée principale de modèles structurels est basée sur l'article fondateur de Merton [?], où un défaut est provoqué quand une entreprise n'arrive pas à rembourser ses obligations ou ses dettes. Dans l'article original de Merton, la valeur de l'entreprise est modélisée comme dans le modèle de Black-Scholes

$$dV_t = V_t(\mu dt + \sigma dW_t) \tag{4.1}$$

où le rendement μ et la volatilité σ sont constants et W est un mouvement brownien. Le flux de cash peut aussi être pris en compte par exemple en rajoutant un taux de coupon c qui est often supposé positif et plus petit que r. Le défaut de l'entreprise se produit à la maturité T de ses dettes si sa valeur à T ne permet pas d'effectuer le remboursement, i.e. $V_T \leq L$, L etant une constante représentant le montant nominal de dette. En d'autres termes, le défaut ne dépend que de la valeur terminale de V mais pas de son trajectoire et il y a une seule date possible pour le défaut : $\tau = T1_{\{V_T<L\}} + \infty 1_{\{V_T \geq L\}}$. Dans ce modèle, la filtration de référence $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est engendrée par le mouvement brownien W. Le temps de défaut τ n'est pas un $\mathbb{F}$ temps d'arrêt.

Pour l'emetteur de dette, il reçoit à la maturité T le montant L s'il y n'y pas de défaut et V_T sinon, c-à-d, sa fonction de payoff est $h_T = \min(V_T, L)$. L'évaluation de cette dette à une date $t \leq T$ est similaire que dans le modèle classique de Black-Scholes pour une option Put par l'observation $\min(V_T, L) = L - (L - V_T)^+$. On désigne par D_t la valeur de dette de l'entreprise à la date t, qui est donnée par $D_t = LB(t,T) - P_t$ avec $B(t,T)$ le prix d'un zéro coupon de maturité T et P_t le prix Black-Scholes d'une option Put de maturité T, de strike L et de sous-jacent V. La valeur d'équity de l'entreprise est donnée par $E_t = V_t - D_t$. Comme $E_T = V_T - \min(V_T, L) = (V_T - L)^+$, on obtient $E_t = C_t$ où C_t est le prix Black-Scholes d'une option Call de la même caractéristique.

Les probabilités de défaut et de survie peuvent être calculées directement,

$$\mathbb{P}(\tau \leq T|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(V_T < L|\mathcal{F}_t) = \mathcal{N}(-d_t)$$

où $\mathcal{N}$ désigne la fonction de répartition de la loi noramle $N(0, 1)$ et

$$d_t = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big(\ln\Big(\frac{V_t}{L}\Big) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big).$$

Le terme d_t est appelé la *distance to default* à l'instant t.

4.2 Modèles du première temps de passage

Une famille de modèles qui étendent le modèle de Merton repose sur l'idée suivante : le défaut peut avoir lieu au tout moment quand la valeur de l'entreprise déscend au dessous d'un seuil, souvent supposé constant ou déterministe, éventuellement choisi par les gérants de l'entreprise suivant certains critères économiques. Mathématiquement, il s'agit du temps d'atteint, qui sont des temps aléatoire d'entrer ou sortir d'un ensemble. Dans ces modèles, le temps de défaut est un temps d'arrêt par rapport à la filtration engendrée par le processus sous-jacent. Le cas où le seuil est aléatoire sera discuté dans le chapitre suivant en faisant un lien avec les modèles d'intensité.

4.2.1 Temps d'atteint

Le problème du temps d'atteint est posé comme la suite : étant donné un processus X et un ensemble B, on introduit

$$\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in B\} \tag{4.2}$$

qui est le premier instant d'entrée de X dans l'ensemble B. On rappelle d'abord quelques propri 'etés générales.

Théorème 4.2.1 *[4, Thm 1.27] Soient $\mathbb{F}$ une filtraion usuelle et A un ensemble $\mathbb{F}$-optionnel, alors $\tau = \inf\{t \geq 0 : (\omega, t) \in A\}$ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt.*

En particulier, si X est un processus $\mathbb{F}$-optionnel avec $\mathbb{F}$ usuelle à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et B est un ensemble borélien de $\mathbb{R}^d$, alors $\tau = \inf\{t : X_t \in B\}$ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt en prenant l'ensemble optionnel $A = \{X \in B\}$. Dans des situations particulières, des hypothèses plus faibles suffisent pour établir le résultat.

Proposition 4.2.2 *Soient X un processus continue à droite et $\mathbb{F}$-adapté, et B un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$. Alors $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \in B\}$ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt.*

Démonstration. Comme B est ouvert, X est càd et $\mathbb{F}$-adapté, on a

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{s<t, s\in\mathbb{Q}} \{\tau \leq s\} = \bigcup_{s<t, s\in\mathbb{Q}} \{X_s \in B\} \in \mathcal{F}_t.$$

Par le lemme 2.1.2, τ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt. □

Proposition 4.2.3 *Soient A un ensemble $\mathbb{F}$-prévisible et $\tau := \inf\{t : (\omega, t) \in A\}$. Si $[\![\tau]\!] \subset A$, alors τ est un $\mathbb{F}$-temps prévisible.*

Démonstration. Par la définition de τ et le fait que $[\![\tau]\!] \subset A$, on a $[\![\tau]\!] = A \cap [\![0, \tau]\!]$. Donc $[\![\tau]\!]$ est un ensemble prévisible. D'après la proposition 2.2.5, le temps d'arrêt τ est prévisible. □

Exemple 4.2.4 (Changement de temps aléatoire) Soit $X \geq 0$ un processus croissant, continue à droite et $\mathbb{F}$-adapté. Alors

$$\tau_s = \inf\{t \geq 0 : X_t > s\}, \quad s \geq 0,$$

est un processus càd de temps d'arrêt, qui engendre le filtration $(\mathcal{G}_s := \mathcal{F}_{\tau_s})_{s \geq 0}$.

Exemple 4.2.5 Soient $X \geq 0$ un processus décroissant, continue à droite et $\mathbb{F}$-adapté, et L une constante réelle. Alors $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq L\}$ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt. (On remarque que $\{\tau \leq t\} = \{X_t \leq L\}$.) Si de plus X est prévisible, alors τ ainsi défini est un temps $\mathbb{F}$-prévisible. En effet, d'après la continuité à droite de X, on a

$$[\![\tau]\!] \subset X^{-1}([L, +\infty[).$$

En particulier, si X est un processus continu, alors τ est un temps prévisible. On donnera des exemples explicits dans la suite.

4.2.2 Modèle de Black-Cox

On modélise le processus sous-jacent comme dans le modèle de Black-Scholes

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0$$

où W est un mouvement brownien standard et μ, σ sont des constantes. Soit

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : S_t \leq C\} \tag{4.3}$$

où C est une constante et $\inf \emptyset = +\infty$. Comme $S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t)$,

$$\tau = \inf\Big\{t \geq 0 : W_t + \big(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\big)t \leq \frac{1}{\sigma} \ln \frac{C}{S_0}\Big\}$$

qui est un temps d'atteint pour un mouvement brownien avec drift d'une barrière constante.

Remarque 4.2.6 Par les discussions dans la section 4.2.1, le temps de défaut défini par (4.3) est un temps d'arrêt prévisible par rapport à la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ engendrée par le mouvment brownien et donc n'admet pas d'intensité (voir la proposition 3.2.7).

Dans la suite, on considère un processus $X_t = W_t + \nu t$ où ν est une constante et on désigne son processus infimum par $m_t^X = \min_{0\leq u\leq t} X_u$.

Lemme 4.2.7 *(Principe de Reflet) Soit W un mouvement brownien standard, alors, pour tout $y \leq 0$ et $y \leq x$,*

$$\mathbb{P}(W_t \geq x, m_t^W \leq y) = \mathbb{P}(W_t \leq 2y - x). \tag{4.4}$$

Démonstration. □

Lemme 4.2.8 *Pour tout $y \leq 0$ et $y \leq x$, et tout $t \geq 0$, on a*

$$\mathbb{P}(X_t \geq x, m_t^X \leq y) = e^{2\nu y}\mathcal{N}\Big(\frac{2y - x + \nu t}{\sqrt{t}}\Big). \tag{4.5}$$

Démonstration. On va utiliser la technique de changements de probabilités. Soit $\widehat{\mathbb{P}}$ une probabilité équivalente de $\mathbb{P}$ définie par

$$\frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = e^{-\nu W_T - \frac{\nu^2}{2}T}, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Alors $X_t = W_t + \nu t$ est un mouvement brownien sous $\widehat{\mathbb{P}}$ et

$$\mathbb{P}(X_t \geq x, m_t^X \leq y) = \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{P}}}[e^{\nu X_T - \frac{\nu^2 T}{2}} 1_{\{X_t\geq x, m_t^X \leq y\}}].$$

Par le principe de reflet,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{P}}}[e^{\nu X_T - \frac{\nu^2 T}{2}} 1_{\{X_t\geq x, m_t^X \leq y\}}] &= \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{P}}}[e^{\nu(2y - X_T) - \frac{\nu^2 T}{2}} 1_{\{2y - X_t\geq x, m_t^X \leq y\}}] \\
&= \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{P}}}[e^{\nu(2y - X_T) - \frac{\nu^2 T}{2}} 1_{\{2y - X_t\geq x\}}] \\
&= e^{2\nu y}\,\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{P}}}[e^{-\nu X_T - \frac{\nu^2 T}{2}} 1_{\{X_t\leq 2y - x\}}].
\end{aligned}$$

Soit

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\widehat{\mathbb{P}}} = e^{-\nu X_T - \frac{\nu^2}{2}T}, \quad \widehat{\mathbb{P}} - p.s.$$

Sous la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$, $\widetilde{W}_t = X_t + \nu t$ est un mouvement brownien. On a

$$e^{2\nu y}\,\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{P}}}[e^{-\nu X_T - \frac{\nu^2 T}{2}} 1_{\{X_t\leq 2y - x\}}] = e^{2\nu y}\,\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}[1_{\{X_t\leq 2y - x\}}],$$

qui implique sous la probabilité initiale

$$\mathbb{P}(X_t \geq x, m_t^X \leq y) = e^{2\nu y}\,\mathbb{P}(X_t \leq 2y - x + 2\nu t) = e^{2\nu y}\mathcal{N}\Big(\frac{2y - x + \nu t}{\sqrt{t}}\Big).$$

□

Proposition 4.2.9 *Pour tout $x \leq 0$,*

$$\mathbb{P}(m_t^X \geq x) = \mathcal{N}\Big(\frac{-x+\nu t}{\sqrt{t}}\Big) - e^{2\nu x}\mathcal{N}\Big(\frac{x+\nu t}{\sqrt{t}}\Big). \tag{4.6}$$

Démonstration. Pour tout $y \leq 0$ et $y \leq x$, et tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t \geq x, m_t^X \geq y) &= \mathbb{P}(X_t \geq x) - \mathbb{P}(X_t \geq x, m_t^X \leq y)\\ &= \mathcal{N}\Big(\frac{-x+\nu t}{\sqrt{t}}\Big) - e^{2\nu y}\mathcal{N}\Big(\frac{2y-x+\nu t}{\sqrt{t}}\Big).\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(X_t \geq x, m_t^X \geq x) = \mathbb{P}(m_t^X \geq x)$, on obtient la proposition. □

Proposition 4.2.10 *Pour tous $0 \leq t \leq T$, on a*

$$\mathbb{P}(\tau \leq T|\mathcal{F}_t) = 1_{\{\tau>t\}}\Big\{\mathcal{N}\Big(\frac{-x+X_t+\nu t}{\sqrt{t}}\Big) - e^{2\nu(x-X_t)}\mathcal{N}\Big(\frac{x-X_t+\nu t}{\sqrt{t}}\Big)\Big\}$$

où $X_t = W_t + \nu t$ avec $\nu = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$ et $x = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{C}{S_0}$.

Démonstration. Comme $\{\tau \leq T\} = \{m_T^X \geq x\}$, on applique la proposition 4.2.9 en utilisant la propriété de Markov du mouvement brownien et obtient

$$\mathbb{P}(m_T^X \geq x|\mathcal{F}_t) = 1_{\{m_t^X \geq x\}}\Big\{\mathcal{N}\Big(\frac{-(x-X_t)+\nu t}{\sqrt{t}}\Big) - e^{2\nu(x-X_t)}\mathcal{N}\Big(\frac{(x-X_t)+\nu t}{\sqrt{t}}\Big)\Big\}.$$

□