Chapitre 5

Modèles d'Intensité

Les deux approches dans la modélisation de risque de crédit — approche structurel et approche d'intensité — ne sont pas compatibles : dans les modèles d'intensité, l'existence de l'intensité de défaut implique que le temps de défaut ne peut pas être un temps d'arrêt prévisible, contrairement aux modèles structurels. Une façon d'établir un lien entre les deux approches est de specifier, dans les modèles structurels, un seuil de défaut aléatoire qui n'est pas mesurable par rapport aux tribus engendrées par le processus sous-jacent. L'exemple le plus important est le modèle de Cox.

D'autre part, il existe un lien étroit entre les modèles d'intensité de crédit et les modèles de taux d'intérêt. L'intensité de défaut peut être interprétée comme un "spread" par rapport au taux d'intérêt court. Pour cette raison, on applique souvent des modèles explicites des taux d'intérêt pour modéliser l'intensité.

5.1 Modèle de Cox

La motivation initiale des modèles d'intensité est de décrire les temps de défaut de façon plus "surprise", où on utilise souvent les processus ponctuels. Un *processus ponctuel* est une suite de temps aléatoires $(\tau_n)_{n\geq 0}$ à valeur dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que $\tau_0 = 0$, $\tau_n < \tau_{n+1}$ et $\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$. Le processus de compage associé à $(\tau_n)_{n\geq 0}$ est donné par $N_t = n$ si $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$. Plus généralement, un *processus de comptage* $(N_t, t \geq 0)$ est un processus croissant à valeur en entiers positifs avec $N_0 = 0$.

Un processus de Poisson $(N_t, t \geq 0)$ de l'intensité λ, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, est un processus de comptage à accroissements indépendants et stationnaires qui satisfait, pour tous $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = n) = \frac{1}{n!} e^{-\lambda(t-s)} (\lambda(t-s))^n,$$

avec $0! = 1$ par convention. On a $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$. De plus, le processus $(N_t - \lambda t, t \geq 0)$ est une martingale par rapport à la filtration canonique du processus de Poisson. Si on modélise le temps de défaut comme le premier instant de saut, c-à-d,

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : N_t > 0\}, \tag{5.1}$$

alors $\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}$. On peut généraliser le processus de Poisson au cas où l'intensité est une fonction déterministe ou un processus stochastique. Un *processus de Poisson inhomogène* $(N_t, t \geq 0)$ avec la fonction d'intensité $\lambda(t) \geq 0$ est un processus de comptage à accroissements indépendants et stationnaires tel que

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = n) = \frac{1}{n!} e^{-\int_s^t \lambda(u)du} \Big(\int_s^t \lambda(u)du \Big)^n.$$

C'est facile de vérifier qu'il a des propriétés similaires qu'un processus de Poisson. En particulier, le processus $(N_t - \int_0^t \lambda(u)du, t \geq 0)$ est une martingale. Soit τ défini par (5.1), alors la probabilité de survie est donnée par $\mathbb{P}(\tau > t) = \exp(-\int_0^t \lambda(u)du)$.

Dans le modèle de Cox, le temps de défaut est modélisé comme le premier instant de saut d'un processus de Cox et l'intensité de défaut est un processus stochastique. Un processus de Cox, ou un *processus de Poisson doublement stochastique* est construit en deux étapes : on se donne d'abord un processus d'intensité $(\lambda_t, t \geq 0)$ qui est positif et adapté à une filtration de référence $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, conditionellement à la filtration $\mathbb{F}$, le processus de Cox $(N_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson inhomogène. En d'autre terme, $(N_t, t \geq 0)$ est un processus de comptage à accroissements indépendants et stationnaires tel que

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = n|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{n!} e^{-\int_s^t \lambda_u du} \Big(\int_s^t \lambda_u du \Big)^n.$$

Nous choisissons la filtration $\mathbb{F}$ comme la filtration “sans défaut” dans le chapitre précédent.

On présente la méthode standard du marché pour construire un temps de défaut, qui est un exemple particulier du modèle de Cox. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On se donne un processus positif et $\mathbb{F}$-adapté $(\lambda_t, t \geq 0)$ et définie

$$\tau := \{t \geq 0 : \int_0^t \lambda_s ds \geq \Theta\} \tag{5.2}$$

où Θ est une variable aléatoire indépendante de $\mathcal{F}_\infty$ qui suit la loi exponentielle de paramètre 1. Dans ce modèle, on généralise les modèles structurels en choisissant un seuil aléatoire. On a

$$\mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_\infty) = \exp(-\int_0^t \lambda_s ds).$$

L'indépendance entre Θ et $\mathcal{F}_\infty$ implique que l'hypothèse (H) est satisfaite dans ce modèle. La loi exponentielle du seuil Θ permet d'établir un lien entre les modèles de taux d'intérêt que nous préciseront dans la suite.

Dans le modèle de Cox, le processus λ est la $\mathbb{F}$-intensité de τ, c'est-à-dire $(1_{\{\tau\leq t\}} - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda_s ds,\ t \geq 0)$, est une $\mathbb{G}$-martingale. On peut généraliser ce modèle au cas d'une barrière non-indépendante, où la prorpiété d'immersion peut être ne pas valide. On désigne par $F_t^{\Theta}(s) = \mathbb{P}(\Theta \leq s|\mathcal{F}_t)$, $s, t \geq 0$ la loi conditionnelle de Θ sachant $\mathcal{F}_t$. Alors la probabilité conditonnelle de défaut est

$$F_t(s) := \mathbb{P}(\tau \leq s|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(\Theta \leq \Lambda_s|\mathcal{F}_t) = \begin{cases} F_t^{\Theta}(\Lambda_s), & s \leq t, \\ \mathbb{E}(F_s^{\Theta}(\Lambda_s)|\mathcal{F}_t), & s > t, \end{cases}$$

où $\Lambda_s = \int_0^s \lambda_u \mathrm{d}u$. On récupère le modèle de Cox en prenant $F_t(s) = 1 - \exp(-\int_0^s \lambda_u \mathrm{d}u)$ pour $s \leq t$.

Dans ce modèle généralisé, le processus λ n'est plus la $\mathbb{F}$-intensité (celle-ci est vraie dans le modèle de Cox). On suppose que la loi conditionnelle de Θ admet une densité

$$F_t^{\Theta}(s) = \int_0^s f_t^{\Theta}(u)\mathrm{d}u.$$

Alors le temps de défaut τ admet une densité conditionnelle $p_t(u)\mathrm{d}u = \mathbb{P}(\tau \in du|\mathcal{F}_t)$ donnée par

$$p_t(u) = \lambda_u f_t^{\Theta}(\Lambda_u), \quad u \leq t.$$

La $\mathbb{F}$-intensité de τ est alors

$$\lambda_t^{\mathbb{F}} = \frac{p_t(t)}{G_t} = \lambda_t \frac{f_t^{\Theta}(\Lambda_t)}{1 - F_t^{\Theta}(\Lambda_t)}.$$

Sans propriété d'immesion, le processus d'intensité n'est pas suffisant pour donner la loi conditionnelle de τ sachant $\mathbb{F}$ (dans le modèle au-dessus, on a besoin aussi de connaître Θ).

5.2 Évaluation des produits financiers

5.2.1 Zéro-coupon défautable

On rappelle que dans les modèles classiques de taux d'intérêt sans risque de crédit, les informations sont représentées par une filtration "sans défaut" $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Le taux d'intérêt court $(r_t, t \geq 0)$ est un processus $\mathbb{F}$-adapté et le prix d'un zéro-coupon de maturité T est donné par

$$B(t, T) = \mathbb{E}[\exp(-\int_t^T r_s ds)|\mathcal{F}_t], \quad t \leq T$$

sous une certaine probabilité risque-neutre.

Un zéro-coupon défautable est un produit financier qui permet à son acheteur de recevoir 1 euro à la maturité T si le défaut n'a pas lieu avant T et 0 sinon. Pour évaluer ce produit, on doit inclure les informations concernant le défaut et considérer la filtration globale $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$. Donc le prix d'un zéro coupon défautable à une date $t \leq T$ est donné par

$$\begin{aligned}\widetilde{B}(t,T) &= \mathbb{E}[1_{\{\tau>T\}}\exp(-\int_t^T r_s ds)|\mathcal{G}_t] \\ &= 1_{\{\tau>t\}}\frac{1}{S_t}\mathbb{E}[S_T\exp(-\int_t^T r_s ds)|\mathcal{F}_t]\end{aligned} \tag{5.3}$$

où $S_t = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t)$ et la deuxième égalité est une conséquence de la proposition 3.1.3. Dans le modèle de Cox (5.2), $S_t = \exp(-\int_0^t \lambda_s ds)$, d'où vient

$$\widetilde{B}(t,T) = \mathbb{E}[\exp(-\int_t^T (r_s+\lambda_s)ds)|\mathcal{F}_t]. \tag{5.4}$$

L'interprétation financière de la formule précédente est intéressante. L'intensité λ peut être vue comme un "crédit spread" par rapport au taux d'intérêt sans risque. Le risque de crédit devient plus grand lorsque l'inténsité augmente.

On peut également considérer un zéro-coupon défautable avec recouvrement. Si au cas de défaut, l'achteur du bond peut recevoir une proportion R de la valeur nomiale 1, où R est une constante dans $]0,1[$, alors son prix à une date $t < T\wedge\tau$ est

$$\begin{aligned}\widetilde{B}(t,T) &= \mathbb{E}\Big[(1_{\{\tau>T\}} + R1_{\{t<\tau\leq T\}})\exp\Big(-\int_t^T r_s ds\Big)\Big|\mathcal{G}_t\Big] \\ &= 1_{\{\tau>t\}}\Big(R\mathbb{E}[\exp(-\int_t^T r_s ds)|\mathcal{F}_t] + (1-R)\mathbb{E}[\exp(-\int_t^T (r_s+\lambda_s)ds)|\mathcal{F}_t]\Big).\end{aligned}$$

Exemple 5.2.1 (Modèle de Vasicek) On suppose que les processus d'intérêt r et d'intensité λ sont des processus Ornstein-Uhlenbeck qui satisfont

$$\begin{aligned}dr_t &= a(b-r_t)dt + \sigma dW_t, \\ d\lambda_t &= \bar{a}(\bar{b}-\lambda_t)dt + \bar{\sigma}d\overline{W}_t,\end{aligned}$$

où $a, b, \sigma, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\sigma}$ sont des constantes positives, et $d\langle W, \overline{W}\rangle_t = \rho dt$ avec $\rho \in [0,1]$. Le pricing d'un bond zéro-coupon défautable est alors similaire à celui d'un bond zéro-coupon classique. La formule d'évaluation (5.4) avec le modèle de Vasicek est laissée comme un exercice.

5.2.2 Dérivée de crédit générale

On considère maintenant un produit financier général, sensible au risque de défaut, représenté par le triplet (C, G, Z) (cf. §1.1.2), dans le modèle de Cox.

Proposition 5.2.2 *On suppose que le processus S est continue, alors la valeur du produit (C, G, Z) à une date $t < T \wedge \tau$ est donnée par*

$$V_t = 1_{\{\tau>t\}} \frac{B_t}{S_t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \Big[B_T^{-1} S_T C + \int_t^T B_u^{-1} S_u (Z_u \lambda_u^{\mathbb{F}} du + dG_u) \,|\, \mathcal{F}_t \Big].$$

Démonstration. Par définition, pour $t \leq T$, on a

$$V_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[B_T^{-1} C 1_{\{\tau>T\}} + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} B_u^{-1} dG_u + B_\tau^{-1} Z_\tau 1_{\{t<\tau\leq T\}} \,\middle|\, \mathcal{G}_t \right].$$

D'après la proposition 3.1.3, on a

$$B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [B_T^{-1} C 1_{\{\tau>T\}} | \mathcal{G}_t] = 1_{\{\tau>t\}} \frac{B_t}{S_t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [B_T^{-1} C S_T | \mathcal{F}_t].$$

Le terme de divident (l'intégrale par rapport à dG_u) se calcule comme

$$\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} B_u^{-1} dG_u = 1_{\{t<\tau\leq T\}} \int_t^\tau B_u^{-1} dG_u + 1_{\{\tau>T\}} \int_t^T B_u^{-1} dG_u.$$

On désign par $Y_u = \int_t^u B_v^{-1} dG_v$. Alors

$$\begin{aligned} & B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} B_u^{-1} dG_u + B_\tau^{-1} Z_\tau 1_{\{t<\tau\leq T\}} | \mathcal{G}_t] \\ &= B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [1_{\{\tau>T\}} Y_T + 1_{\{t<\tau\leq T\}} \big(\int_t^\tau B_u^{-1} dG_u + B_\tau^{-1} Z_\tau \big) | \mathcal{G}_t] \\ &= B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [1_{\{\tau>T\}} Y_T + 1_{\{t<\tau\leq T\}} R_\tau | \mathcal{G}_t], \end{aligned}$$

où $R_u = Y_u + B_u^{-1} Z_u$. On utilise de nouveau la proposition 3.1.3 pour obtenir

$$B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [1_{\{\tau>T\}} Y_T | \mathcal{G}_t] = 1_{\{\tau>t\}} \frac{B_t}{S_t} \mathbb{E} [S_T Y_T | \mathcal{F}_t].$$

En outre, on a

$$B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [1_{\{t<\tau\leq T\}} R_\tau | \mathcal{G}_t] = -1_{\{\tau>t\}} \frac{B_t}{S_t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\int_t^T R_u dS_u | \mathcal{F}_t].$$

En combinant tous ces calculs, on obtient

$$V_t = 1_{\{\tau>t\}} \frac{B_t}{S_t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \Big[B_T^{-1} S_T X + S_T Y_T - \int_t^T \big(B_u^{-1} Z_u + Y_u \big) dS_u | \mathcal{F}) t \Big]$$

Comme S est un processus continu, par la proposition 3.2.6 on obtient que son compensateur A vérifie $dA_u = S_u \lambda_u du$. Donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [- \int_t^T B_u^{-1} Z_u dS_u | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\int_t^T B_u^{-1} Z_u S_u \lambda_u^{\mathbb{F}} du | \mathcal{F}_t].$$

Enfin, la formule d'Itô entraîne

$$S_T Y_T - \int_t^T Y_u dS_u = \int_t^T S_u dY_u = \int_t^T S_u B_u^{-1} dG_u.$$

La démonstration est ainsi achevée. $\square$

Corollaire 5.2.3 *On considère un CDS issue à la date* 0 *dont le spread est noté comme* s*. On suppose que le taux de recouvrement* R *est un processus* $\mathbb{F}$*-prévisible. Alors son processus de prix est donné par*

$$V_t(s) = 1_{\{\tau>t\}} \frac{B_t}{S_t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \Big[\int_t^T B_u^{-1} S_u \big((1-R_u)\lambda_u^{\mathbb{F}} - s \big) du | \mathcal{F}_t \Big].$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que le triplet correspondant à ce produit est $(0, 1-R, st)$. $\square$

5.3 Informations et intensité

Il est parfois convenable d'interpréter l'intensité comme la probabilité infinitésimale de défaut sachant les événements passés.

$$\lambda_t^{\mathbb{G}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(t < \tau \le t+h | \mathcal{G}_t) \tag{5.5}$$

Cette formule qui est pratique dans le calcul, ne guarantit pas l'existence de l'intensité égalité. Un contre-exemple est donné par le modèle de Black-Cox $\tau := \inf\{t \ge 0 : S_t \le l\}$, où S est un mouvement brownien géométrique (associé à un mouvement brownien standard B) et l est une constante. Dans ce cas-là τ est un $\mathbb{F}^B$-temps d'arrêt et la filtration du marché $\mathbb{G}$ (qui est le grossissement progressif de $\mathbb{F} = \mathbb{F}^B$ par l'information de τ) est la filtration $\mathbb{F}^B$ engendrée par le mouvement brownien B. Un calcul direct montre que le terme à droite de la formule (5.5) est égal à 0, tandis que le processus d'intensité n'existe pas.

En général, les filtrations $\mathbb{G}$ et $\mathbb{F}$ ne coïncident pas. Si l'intensité existe et si la relation (5.5) est vérifiée, alors on la relation suivante

$$\lambda_t^{\mathbb{G}} = 1_{t<\tau} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\mathbb{P}(t < \tau \le t+h | \mathcal{F}_t)}{\mathbb{P}(t < \tau | \mathcal{F}_t)}.$$

D'après le lien entre les $\mathbb{G}$-intensité et $\mathbb{F}$-intensité, on obtient

$$\lambda_t^{\mathbb{F}} = \frac{1}{G_t} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(t < \tau \le t+h | \mathcal{F}_t) \tag{5.6}$$

La comparaison entre (5.5) et (5.6) montre que des hypothèses supplémentaires sont nécessaire quand on applique la formule (5.5) pour calculer l'intensité.

Nous avons étudié les lien entre les intensité de τ par rapport à une filtration ambiante $\mathbb{F}$ et son grossissement progressif $\mathbb{G}$. Dans la suite, on considère le calcul du processus d'intensité relativement à un rétrécissement de la filtration ambiante $\mathbb{F}$.

Proposition 5.3.1 *On suppose que τ admet un $\mathbb{F}$-intensité, alors pour toute sous-filtration $\widetilde{\mathbb{F}} \subset \mathbb{F}$, le temps aléatoire τ admet aussi une $\widetilde{\mathbb{F}}$-intensité $\lambda^{\widetilde{\mathbb{F}}}$ donnée par*

$$\lambda_t^{\widetilde{\mathbb{F}}} = \frac{\mathbb{E}(\lambda_t^{\mathbb{F}} 1_{\tau>t}|\widetilde{\mathcal{F}_t})}{\mathbb{P}[\tau > t|\widetilde{\mathcal{F}_t})}.$$

Démonstration. Comme $\lambda^{\mathbb{F}}$ est la $\mathbb{F}$-intensité de τ, on a

$$\mathbb{P}[t < \tau \leq T \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\int_t^T 1_{\{\tau>s\}} \lambda_s^{\mathbb{F}} ds \,|\, \mathcal{F}_t].$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\widetilde{\mathcal{F}}_s$, on obtient

$$\mathbb{E}[1_{\{\tau>s\}}(\lambda_s^{\mathbb{F}} - \lambda_s^{\widetilde{\mathbb{F}}}) \,|\, \widetilde{\mathcal{F}}_s] = 0$$

pour tout s. □

Le rétrécissement est un outil important dans la modélisation du risque de crédit avec information incomplète. Voici quelque exemples typiques :

(1) informations retardées à un niveau constant $\delta > 0$, où $\widetilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t-\delta}$ si $t > \delta$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_0$ sinon ;

(2) information retardées à temps discrets où on observe les infomrations ambiantes à des temps discrets $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$: on a $\widetilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t_i}$ si $t_i \leq t < t_{i+1}$.

Ces modèles d'inforations incomplètes en risques de crédit ont été appliqués à donner un lien entre les modèles structuraux classiques et les modèles d'intensité. Dans l'exemple de Black-Cox, le temps de défaut est modélisé par le premier temps de passage d'un processus du type brownien par une barrière constante, et l'intensité n'existe pas. Cependant, si la filtration en question est engendrée par une observation partielle $\widetilde{\mathbb{F}}$ de a filtration browienne, alors les intentsités par rapport à $\widetilde{\mathbb{F}}$ et $\widetilde{\mathbb{G}}$ peuvent exister, où $\widetilde{\mathbb{G}}$ est le grossissement progressif de $\mathbb{F}$ par les informations de défaut. Un cas très particulier est le cas où $\widetilde{\mathbb{F}}$ est la filtration triviale, où il n'y a aucune obsevation autre que l'évément de défaut. Dans ce cas-là, le temps aléatoire τ admet une intensité déterministe donnée par

$$\lambda(s) = \frac{f(s)}{1 - F(s)},$$

où $F(s) = \mathbb{P}(\tau \leq s) = \int_0^s f(u)du$. Cette existence d'intensité se déduit de l'existence de la densité pour la loi de τ. Le grossissement progressif est engendré par le processus de défaut $\mathcal{D}_t = \sigma(1_{\tau \leq s}, s \leq t)$ (que l'on note $\mathbb{D}$) et la $\mathbb{D}$-intensité est donnée par $\lambda_t^{\mathbb{D}} = \lambda(t \wedge \tau)$.

Cependant, si le temps aléatoire τ admet une $\mathbb{F}$-intensité, il n'est pas vrai en général que τ admet une intensité par rapport à une filtration plus large. En outre, même si le processus d'intensité par rapport à la filtration élargie existe, son calcul est plus compliqué et utilse des techinques de la théorie de grossissement de filtrations. C'est en particulier le cas quand on étudier le risque de crédit avec les information d'un initié.