

## Chapitre 6

# Produits de crédit en portefeuille et défauts corrélés

Dans ce chapitre, on étudie des produits financiers de crédit en portefeuille, notamment  $k^{\text{th}}$ -to-default swap et CDOs (voir §1.2 pour une description de ces produits). Différentes méthodes sont utilisées dans la pratique pour évaluer ces produits, suivant la taille du portefeuille concerné. En particulier, lorsque la taille du portefeuille est très grande (comprenant centaine de noms par exemple), des hypothèses restrictives sont souvent imposées pour simplifier les modèles et l'évaluation des produits.

La corrélation entre les événements de défaut est un facteur essentiel dans l'étude des produits de crédit en portefeuille. Parmi les modèles qui décrivent la structure de corrélation, celui de copule est largement utilisé dans la pratique, surtout dans l'évaluation des CDOs. Il permet de modéliser efficacement la distribution jointe de plusieurs variables aléatoires à partir des distributions marginales. Cependant, les modèles de copule sont souvent statiques et non-compatibles à une étude stochastique des événements de défaut. Cela est un grand désavantage dans la couverture des produits financiers. Modéliser dynamiquement la structure de corrélation entre les événement de défaut qui permet de calculer efficacement le prix d'un produit de crédit en portefeuille à une haute précision est un sujet de recherche important de nos jours.

### 6.1 First default swap

L'évaluation des  $k^{\text{th}}$ -to-default swap est un problème délicat car l'influence de la structure de corrélation entre les événements de défaut est significative et en même temps le nombre des noms concerné n'est pas assez important pour que les méthodes simplifiées comme celle de copule peuvent s'appliquer. Cependant, le first default swap est une exception. L'évaluation du first default swap peut être calculée directement à partir des processus d'intensité marginaux.

On fixe dans ce paragraphe un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  décrivant le marché financier, muni d'une filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  qui représente les informations ne pas sensibles aux risques de défauts. On suppose que  $\mathbb{F}$  satisfait aux conditions usuelles. Soient  $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  une famille de temps aléatoires qui représente les temps de  $n$  événements de défaut. Pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on désigne par  $\mathbb{D}^i$  la filtration engendrée par le processus de défaut de  $\tau_i$ . Soient  $\mathbb{D} := \mathbb{D}^1 \vee \dots \vee \mathbb{D}^n$  et  $\mathbb{G} := \mathbb{D} \vee \mathbb{F}$ . On désigne par  $\tau_{(1)}$  le temps du premier défaut. On a  $\tau_{(1)} = \min\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ .

La proposition suivante calcule explicitement le  $\mathbb{G}$ -compensateur du processus de défaut de  $\tau_{(1)}$ .

**Proposition 6.1.1** *Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on désigne par  $\Lambda^{i, \mathbb{G}}$  le  $\mathbb{G}$ -compensateur de  $\tau_i$ . On suppose que  $\mathbb{P}(\tau_i = \tau_j) = 0$  pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  qui sont distincts. Alors le  $\mathbb{G}$ -compensateur  $\Lambda^{(1), \mathbb{G}}$  de  $\tau_{(1)}$  est déterminé par la formule suivante :*

$$\Lambda_t^{(1), \mathbb{G}} = \sum_{i=1}^n \Lambda_{t \wedge \tau_{(1)}}^{i, \mathbb{G}}.$$

*Démonstration.* Les conditions de la proposition montrent que  $\mathbf{1}_{\{\tau_i = \tau_j\}} = 0$  p.s. pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  qui sont distincts. Cela implique

$$\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t\}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t \wedge \tau_{(1)}\}}, \quad \text{p.s.}$$

Pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$  le processus

$$(\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t \wedge \tau_{(1)}\}} - \Lambda_{t \wedge \tau_{(1)}}^{i, \mathbb{G}})_{t \geq 0}$$

est une  $\mathbb{G}$ -martingale car il est une  $\mathbb{G}$ -martingale arrêtée en le  $\mathbb{G}$ -temps d'arrêt  $\tau_{(1)}$ . En prenant la somme par rapport à  $i$ , on obtient que  $(\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t\}} - \sum_{i=1}^n \Lambda_{t \wedge \tau_{(1)}}^{i, \mathbb{G}}, t \geq 0)$  est une  $\mathbb{G}$ -martingale.  $\square$

L'analogie de la proposition 3.1.3 est encore valable pour le premier temps de défaut.

**Proposition 6.1.2** *Soit  $Y$  une variable aléatoire bornée ou positive. Pour tout  $t \geq 0$ , la relation suivante est vérifiée*

$$\mathbb{P}(\tau_{(1)} > t \mid \mathcal{F}_t) \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} Y \mid \mathcal{G}_t] = \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \mid \mathcal{F}_t].$$

*Démonstration.* Similairement au lemme 3.1.1, on peut montrer qu'il existe une variable aléatoire  $\mathcal{F}_t$ -mesurable  $Y_t^{\mathbb{F}}$  telle que (le détail est laissé comme un exercice)

$$\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}_t] = \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} Y_t^{\mathbb{F}}.$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à  $\mathcal{F}_t$ , on obtient le résultat.  $\square$

Pour tout instant  $t$  avant la maturité  $T$ , le processus de dividende d'un produit financier de crédit associé au premier temps de défaut  $\tau_{(1)}$  peut s'exprime comme

$$X \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > T\}} \mathbf{1}_{\{T\}}(t) + \int_{]0,t]} (1 - H_u^{(1)}) dG_u + \int_{]0,t]} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} = \tau_i\}} Z_u^i dH_u^{(1)}, \quad t \geq 0, \quad (6.1)$$

où  $H_t^{(1)} = \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t\}}$ ,  $G$  est un processus  $\mathbb{F}$ -adapté avec  $G_0 = 0$  représentant les paiements des dividendes,  $\{Z_1, \dots, Z_n\}$  est une famille de processus  $\mathbb{F}$ -prévisible qui représentent les paiements de recouvrement, et  $X$  est la valeur à délivrer à la maturité si aucun événement de défaut n'a lieu. En particulier, pour le produit First-to-Default swap, on a  $G_t = -\kappa t$  et  $Z^i = 1 - R^i$  ( $R_i$  étant le taux de recouvrement), où  $\kappa$  est le spread de FtD. Le processus de dividende correspondant est

$$\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t\}} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} = \tau_i\}} (1 - R^i) - \kappa(\tau_{(1)} \wedge t), \quad t \geq 0,$$

où  $D(a, b)$  désigne le facteur d'actualisation entre les temps  $a$  et  $b$ . On peut utiliser la proposition 6.1.1 à calculer explicitement le processus de valeur.

**Proposition 6.1.3** *Pour tout  $t \geq 0$ , on note  $S_t^{(1)}(t) = \mathbb{P}(\tau_{(1)} > t | \mathcal{F}_t)$ . On suppose que chaque temps de défaut  $\tau_i$  admet une  $\mathbb{F}$ -intensité  $\lambda^{i, \mathbb{F}}$ . Alors le processus de valeur  $V$  du produit financier (6.1) est déterminé par la relation*

$$V_t = \mathbf{1}_{\tau_{(1)} > t} \frac{D_t}{S_t^{(1)}(t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ D_T^{-1} S_T^{(1)} X + \int_t^T D_u^{-1} S_u^{(1)}(u) \left( \sum_{i=1}^n Z_u^i \lambda_u^{i, \mathbb{F}} du + dG_u \right) | \mathcal{F}_t \right].$$

En particulier, le processus de valeur d'un FtD swap est

$$\mathbf{1}_{\tau_{(1)} > t} \frac{D_t}{S_t^{(1)}(t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T D_u^{-1} S_u^{(1)}(u) \left( \sum_{i=1}^n (1 - R_u^i) \lambda_u^{i, \mathbb{F}} - s \right) du | \mathcal{F}_t \right], \quad t \geq 0.$$

## 6.2 Modélisation bottom-up

La méthode de copule permet de modéliser la répartition cumulative de plusieurs variables aléatoires avec un coût de calcul relativement bas. Soit  $n \geq 2$  un entier. Une *coplue* de dimension  $n$  est une application  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  qui vérifie les conditions suivantes :

- (1) la fonction  $(u_1, \dots, u_n) \mapsto C(u_1, \dots, u_n)$  est croissante par rapport à chaque coordonnée  $u_i$ ;
- (2) on a  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;

(3) Pour tous  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_1, \dots, b_n)$  dans  $[0, 1]^n$  avec  $a_i \leq b_i$  quel que soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$\sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} C(u_{1,i_1}, \dots, u_{n,i_n}) \geq 0$$

où  $u_{j,1} = a_j$  et  $u_{j,2} = b_j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Ces trois conditions signifient précisément que l'application  $C$  définit une fonction de répartition  $n$ -dimensionnelle dont les lois marginales sont des lois uniformes sur  $[0, 1]$ .

**Exemple 6.2.1** Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un vecteur gaussien de variables aléatoires dont la matrice de corrélation est notée comme  $\Sigma$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soient  $\mu_i$  et  $\sigma_i^2$  l'espérance et la variance de  $X_i$  respectivement. On désigne par  $U_i$  la variable aléatoire  $\Phi((X_i - \mu_i)/\sigma_i)$ , où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi gaussienne standard. Ce sont des variables aléatoires qui suivent la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . La fonction de répartition cumulative  $C_\Sigma^G$  du vecteur  $(U_1, \dots, U_n)$  est alors une fonction de copule (qui ne dépend pas du choix de  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ ), appelé la copule gaussienne dont la matrice de corrélation est  $\Sigma$ .

Le théorème de Sklar comme ci-dessous montre que toute fonction de répartition cumulative peut être présentée comme une fonction de copule composée avec les fonctions de répartition marginales. Par conséquent, du point de vue théorique, les fonctions de copule suffisent de modéliser les structures de corrélation.

**Théorème 6.2.2** Soit  $F$  la fonction de répartition d'un vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$  de variables aléatoires. On suppose que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la fonction de répartition  $F_i$  de  $X_i$  est continue. Alors il existe un unique fonction de copule  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  telle que l'égalité

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

soit vérifiée pour tous  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

Soient  $\tau_1, \dots, \tau_n$  des temps aléatoires qui représentent les temps de défaut de  $n$  agents. Étant donnée une fonction de copule  $C$ , on peut modéliser la probabilité de survie cumulative comme la suite :

$$\mathbb{P}(\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_n \leq t_n) = C(\mathbb{P}(\tau_1 \leq t_1), \dots, \mathbb{P}(\tau_n \leq t_n)).$$

On peut également modéliser numériquement ces temps de défaut par l'algorithme suivant. Cela est particulièrement utile dans l'évaluation par la méthode de Monte-Carlo.

1. Simuler des variables aléatoires  $U_1, \dots, U_n$  uniformes sur  $[0, 1]$  qui admettent  $C(u_1, \dots, u_n)$  comme la fonction de répartition cumulative.

**Exercice** : simuler des variables aléatoires dont la fonction de répartition cumulative est la fonction de copule gaussienne  $C_\Sigma^G$ , où  $\Sigma$  est la matrice de corrélation.

2. Simuler  $\tau_i$  par

$$\inf\{t \in \mathbb{R}^+ : U_i \leq p_i(t)\},$$

où  $p_i$  est la fonction de répartition de  $\tau_i$  dont la valeur en  $t$  représente la probabilité du défaut du  $i^{\text{ème}}$  agent avant l'instant  $t$ .

Dans cet algorithme, la première étape est essentielle car c'est là où on introduit la structure de corrélation pour les simulations. Dans la pratique, on peut également simuler directement des variables aléatoires uniformes qui sont corrélées (sans introduire explicitement la fonction de copule). Dans cette direction la modélisation par facteurs est très utilisée. Un exemple important est le modèle de facteur gaussien. On modélise  $U_i$  par

$$U_i = \Phi(V_i) \quad \text{where} \quad V_i = \sqrt{\rho_i}Y + \sqrt{1 - \rho_i}Y_i$$

où  $Y$  et  $Y_i$  sont des variables gaussiennes standardes (i.e. suivent la loi  $N(0, 1)$ ) qui sont indépendent,  $\rho_i$  est un coefficient de corrélation. La variable aléatoire  $Y$  représente un facteur commun qui agit sur tous les agent, tandis que la variable aléatoire  $Y_i$  est un facteur individuel agissant sur le  $i^{\text{ème}}$  agent seulement.

Dans ce modèle, les événements de défaut sont conditionnellement indépendants sachant le facteur commun  $Y$ . En outre, les probabilités de défaut conditionnelle  $p_i(t, Y)$  se calcule par la formule suivante :

$$\begin{aligned} p_i(t, y) &= \mathbb{P}(\tau_i \leq t | Y = y) \\ &= \mathbb{P}(\Phi(\sqrt{\rho_i}Y + \sqrt{1 - \rho_i}Y_i) \leq p_i(t) | Y = y) \\ &= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i(t)) - \sqrt{\rho_i}y}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right) \end{aligned}$$

Si on suppose que le portefeuille est homogène, autrement dit, les  $p_i(\cdot) = p(\cdot)$  sont identiques et les  $\rho_i = \rho$  sont identiques, alors la variable aléatoire  $N_t^n$  qui représente le nombre d'événement de défaut avant l'instant  $t$  suit une loi binomiale conditionnellement à  $Y$ . On a

$$\mathbb{P}(N_t^n = k | Y = y) = \binom{n}{k} p(t, y)^k (1 - p(t, y))^{n-k}$$

quel que soit  $k \in \{0, \dots, n\}$ . En prenant l'espérance, on obtient

$$P(N_t^n = k) = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{n}{k} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p(t)) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1 - \rho}}\right)^k \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p(t)) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1 - \rho}}\right)\right)^{n-k} \phi(y) dy.$$

Ce modèle peut être facilement généralisé au cas de plusieurs facteurs, qui ne sont pas nécessairement gaussiens. Soient  $(\epsilon^{(j)})_{j=1}^{J_2}$  des facteurs communs et pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soient  $(Y_i^{(j)})_{j=1}^{J_1}$  des facteurs individuels pour le  $i^{\text{ème}}$  agent. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on définit

$$V_i = \sum_{j=1}^{J_1} \beta_i^{(j)} Y_i^{(j)} + \sum_{j=1}^{J_2} \alpha_i^{(j)} \epsilon^{(j)}$$

et  $U_i = F_i(V_i)$ , où  $F_i$  est la fonction de répartition de  $V_i$ . Alors les  $U_i$  sont indépendantes conditionnellement aux facteurs communs  $\epsilon^{(1)}, \dots, \epsilon^{(J_2)}$ . Si on suppose que la loi cumulative de  $\epsilon^{(1)}, \dots, \epsilon^{(J_2)}$  admet une densité  $p_{(\epsilon^{(1)}, \dots, \epsilon^{(J_2)})}$ , alors on a

$$\mathbb{P}(N_t^n = k) = \int_{\mathbb{R}^{J_2}} \mathbb{P}(N_t^n = k | \epsilon^{(1)} = u_1, \dots, \epsilon^{(J_2)} = u_{J_2}) p_{(\epsilon^{(1)}, \dots, \epsilon^{(J_2)})}(u_1, \dots, u_{J_2}) du_1 \cdots du_{J_2}.$$

L'approche de copule peut aussi être combinée avec le modèle d'intensité. On fixe dans le reste du paragraphe une filtration  $\mathbb{F}$  de référence. On peut prendre par exemple le modèle de Cox

$$p_i(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(s) ds\right),$$

où l'intensité  $\lambda^i$  est un processus  $\mathbb{F}$ -adapté positif. Le temps de défaut est simulé comme

$$\tau_i = \inf\left\{t \in \mathbb{R} : \ln U_i \leq -\int_0^t \lambda_i(s) ds\right\}.$$

Ainsi la distribution marginale conditionnellement à  $\mathcal{F}_\infty$  est

$$\mathbb{P}(\tau_i > t | \mathcal{F}_\infty) = e^{-\int_0^t \lambda_i(s) ds}.$$

Étant donnée une fonction de copule  $C$ , on peut modéliser la probabilité de survie cumulative comme

$$\mathbb{P}(\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n | \mathcal{F}_\infty) = C(\mathbb{P}(\tau_1 > t_1 | \mathcal{F}_\infty), \dots, \mathbb{P}(\tau_n > t_n | \mathcal{F}_\infty)).$$

On peut ensuite modéliser les probabilités de survie conditionnellement à  $\mathbb{F}$  comme

$$\mathbb{P}(\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[C(\mathbb{P}(\tau_1 > t_1 | \mathcal{F}_\infty), \dots, \mathbb{P}(\tau_n > t_n | \mathcal{F}_\infty)) | \mathcal{F}_t].$$

### 6.3 Modélisations top-down

Les modèles top-down consiste à modéliser directement les pertes liées aux événements de défaut. Considérons un portefeuille qui contient  $n$  noms. On suppose que si le défaut d'un agent a lieu, alors on perçoit une perte de 1. Ainsi le processus de perte est

$$L(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}.$$

On désigne par  $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$  la filtration du marché. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soit

$$p_i(t, T) = \mathbb{P}(L(T) = i | \mathcal{G}_t).$$

C'est une famille de  $\mathbb{G}$ -martingales positives sur  $[0, T]$  qui décrit la loi conditionnelle de la perte à la maturité  $T$ . On a évidemment

$$\sum_{i=0}^n p_i(t, T) = 1 \quad \text{p.s.}$$

En outre, comme les  $\tau_i$  sont des  $\mathbb{G}$ -temps d'arrêt, on a

$$p_i(t, t) = \mathbf{1}_{\{L(t)=i\}}$$

pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . En outre, si  $i < L(t)$ , on a  $p_i(t, T) = 0$  car  $L(t)$  est un processus croissant.

On peut utiliser une chaîne de Markov hétérogène à étudier le processus de perte. Soit  $(\tilde{L}(T))_{T \geq t}$  une chaîne de Markov avec l'espace d'état  $\{0, 1, \dots, n\}$ , où les probabilités de transition sont décrites par une matrice de générateurs  $(a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$  telle que

$$a_{ij}(t, T) \geq 0, \quad \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} a_{ik}(t, T) = -a_{ii}(t, T).$$

Pour simplifier les notations, on utilise l'expression  $a_i(t, T)$  pour désigner  $-a_{ii}(t, T)$ . La probabilité de transition

$$P_{ij}(t, T) = \mathbb{P}(\tilde{L}(T) = j \mid \tilde{L}(t) = i)$$

peut être obtenue comme la solution au système d'équations différentielles de Kolmogorov.

$$\begin{cases} \frac{dP_{ij}}{dT}(t, T) = \sum_{k=i}^{j-1} P_{ik}(t, T) a_{kj}(t, T) - P_{ij}(t, T) \sum_{k=j+1}^n a_{jk}(t, T), \\ P_{ij}(t, t) = \mathbf{1}_{\{i=j\}}. \end{cases}$$

Comme  $\tilde{L}(t)$  est croissante par rapport à  $t$ , les matrices de transition et de générateurs sont triangulaires supérieurement. En outre, comme l'état  $\tilde{L}(t) = n$  est absorbant, la dernière ligne de la matrice de générateurs est de la forme  $(0, \dots, 0, 1)$ . La résolution de l'équation différentielle au-dessus donne

$$P_{ij}(t, T) = \begin{cases} 0, & j < i \\ \exp\left(-\int_t^T a_i(t, s) ds\right), & j = i, \\ \sum_{k=i}^{j-1} \int_t^T P_{ik}(t, s) a_{kj}(t, s) \exp\left(-\int_s^T a_j(t, u) du\right), & j > i. \end{cases}$$

**Proposition 6.3.1** *Il existe une chaîne de Markov  $(\tilde{L}(T))_{T \geq t}$  sur  $\{0, \dots, n\}$  telle que  $p_i(t, T) = \mathbb{P}(L(T) = i | \mathcal{G}_t)$  s'écrive comme  $P_{\tilde{L}(t), i}(t, T)$  ( $0 \leq i \leq n, T \geq t$ ), où  $(P_{ij}(t, T))_{0 \leq i, j \leq n}$  est la matrice de transition.*

Pour modéliser la distribution de perte, il suffit de modéliser la matrice  $A(t, T)$  comme un processus stochastique  $\mathbb{G}$ -adapté. Certaines conditions sont exigées :

1.  $A(t, T)$  est bi-diagonale, i.e., pour tout  $0 \leq i < n$  et tout  $j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i, i + 1\}$ , on a  $a_{ij}(t, T) = 0$ . Ainsi  $a_i(t, T) = -a_{ii}(t, T) = a_{i, i+1}(t, T) \geq 0$ ,  $a_n(t, T) = 0$ ;
2. l'équation de Kolomogorov admet une solution ;
3. il existe une variable aléatoire intégrable  $Y$  tel que  $A(t, T) \leq Y$  p.s., et  $A(t, T)$  est continue à droite sur  $T$ .

## 6.4 Méthodes numérique pour l'évaluation de CDO

Du point de vue numérique, l'évaluation des CDOs peut se ramener à calculer l'espérance d'une fonction Call évaluée en la perte totale du portefeuille sous-jacent. Considérons un CDO dont le portefeuille consiste de  $n$  CDS dont les temps de défaut sont notés comme  $\tau_1, \dots, \tau_n$ . Pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $N_i$  la valeur nominale du  $i^{\text{ème}}$  agent dans le portefeuille. La perte totale à la maturité  $T$  est donc

$$L_T = \sum_{i=1}^n N_i (1 - R_i) 1_{\{\tau_i \leq T\}},$$

où  $R_i$  est le taux de recouvrement du  $i^{\text{ème}}$  agent. Pour simplifier la présentation, on suppose que les valeurs nomiales  $N_i$  sont tous égale à 1.

On s'intéresse à calculer les espérances conditionnelles de la forme  $\mathbb{E}[(L_T - K)^+]$ , où  $K$  est une constante réelle. Le modèle à facteur est particulièrement commode car il permet de ramener le problème à calculer une espérance d'une fonction évaluée en une somme de variables aléatoires indépendantes. On commence à calculer l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}[(L_T - K)^+ | Y]$  (qui est une espérance d'une fonction en somme de variables aléatoires indépendantes), puis retrouver  $\mathbb{E}[(L_T - K)^+]$  en prenant l'espérance de cette variable aléatoire.

Dans la suite, on suppose que les  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  sont indépendantes. Donc  $L_T$  devient une somme de variables aléatoires indépendantes.

### Méthode récursive

La méthode récursive consiste à ramener le problème au calcul des espérances sous la même forme pour des portefeuilles plus petits. Pour cela on introduit quelques notations. Pour tout  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , soit

$$T(I, K) = \mathbb{E}[(L_T(I) - K)^+],$$



où

$$L_T(I) = \sum_{i \in I} (1 - R_i) \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}.$$

Dans le cas où  $I = \emptyset$ , on a  $T(\emptyset, K) = (-K)^+$ . On peut calculer  $T(I, K)$  de façon récursive comme la suite :

$$\begin{aligned} T(I, K) &= \mathbb{E}[(L_T(I \setminus \{j\}) + (1 - R_j) \mathbf{1}_{\{\tau_j \leq T\}} - K)^+] \\ &= \mathbb{P}(\tau_j \leq T) \mathbb{E}[(L_T(I \setminus \{j\}) + (1 - R_j) - K)^+] + \mathbb{P}(\tau_j > T) \mathbb{E}[(L_T(I \setminus \{j\}) - K)^+] \\ &= p_j T((I \setminus \{j\}), K + R_j - 1) + (1 - p_j) T(I \setminus \{j\}, K), \end{aligned}$$

où  $p_j = \mathbb{P}(\tau_j \leq T)$  est la probabilité de défaut du  $j^{\text{ème}}$  agent. Cette méthode est très précise : théoriquement elle permet de trouver la valeur exacte de  $T(I, K)$ . Cependant, le temps de calcul est exponentiel par rapport à  $n$ , et devient inefficace lorsque  $n$  est grand ( $\geq 30$  par exemple). Toutefois, si les probabilités de défaut  $p_i$  sont supposées être identiques et si les taux de recouvrement  $R_i$  sont la même, alors la fonction  $T(I, \cdot)$  ne dépend que du cardinal de  $I$ . Donc le coût du temps de calcul peut être réduit à une fonction linéaire en  $n$ . Plus généralement, si les agents peuvent être regroupés en quelques catégories où dans chaque catégorie les probabilités de défauts sont identiques et les taux de recouvrement sont le même, alors le temps de calcul est exponentiel par rapport au nombre de catégorie et linéaire par rapport à la taille maximale des catégories.

**Méthode de col** La méthode de col est basée sur la transformation de Laplace et sa transformation inverse. Étant donnée une variable aléatoire bornée  $X$ , la transformée de Laplace de  $X$  est définie comme  $M_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}]$  ( $s \in \mathbb{C}$ ). D'après le théorème de dérivation sous signe somme, cette fonction est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Lorsque la loi de la variable aléatoire  $X$  admet une densité  $f_X$ , on peut calculer la fonction de densité via la transformée inverse de Laplace : on a

$$f_X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} e^{-st} M_X(s) ds, \quad (6.2)$$

où  $\kappa$  est un abscisse réel. Plus généralement (où la loi de  $X$  n'a pas nécessairement de densité), si  $F$  est une fonction borélienne sur  $\mathbb{R}$ , alors on a

$$\mathbb{E}[F(X)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-st} F(t) dt \right) M_X(s) ds,$$

pourvu que l'intégrale à droite est bien définie. Le cas d'une fonction de Call est particulièrement intéressant : on a

$$\mathbb{E}[(X - K)^+] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \frac{1}{s^2} e^{-sK} M_X(s) ds.$$

Il s'avère que la valeur de cette intégrale ne dépend pas du choix de l'abscisse  $\kappa > 0$ . Cependant, du point de vue numérique, le choix de l'abscisse  $\kappa$  est un point important :

on cherche un abscisse (appelé le point de col) où la transformée de Laplace  $M_X$  est la plus concentrée pour simplifier le calcul numérique de l'intégrale.

La transformation de Laplace est très commode dans l'étude des sommes de variables aléatoires indépendantes : si  $\{Y_1, \dots, Y_n\}$  est une famille de variables aléatoires indépendantes et si  $Y = Y_1 + \dots + Y_n$ , alors on a

$$M_Y = \prod_{i=1}^n M_{Y_i}.$$

Si on applique ce résultat à  $L_T = \sum_{i=1}^n (1 - R_i) \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}$ , on obtient

$$M_{L_T}(s) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{(1-R_i)s \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}}] = \prod_{i=1}^n (p_i e^{(1-R_i)s} + (1 - p_i)),$$

où  $p_i = \mathbb{P}(\tau_i \leq T)$ .

Le choix du point de col que l'on adopte ici est l'unique solution  $\hat{\kappa}$  de l'équation

$$\frac{M'_{L_T}(x)}{M_{L_T}(x)} = K, \quad x > 0$$

car le développement de Taylor de  $e^{-sK} M_X(s)$  en ce point est plus facile à calculer. Les premiers développements de  $\mathbb{E}[(L - K)^+]$  peuvent être calculés comme la suite :

1.  $C_0 = (\mathbb{E}[L_T] - K)^+$ ,
2.  $C_1 = C_0 + M_{L_T}(\hat{\kappa}) e^{-\hat{\kappa}K} J_2((\ln M_{L_T})''(\hat{\kappa}), \hat{\kappa})$ ,
3.  $C_2 = C_1 + \frac{1}{6} \hat{\kappa} (\ln M_{L_T})'''(\hat{\kappa}) e^{-\hat{\kappa}K} M_{L_T}(\hat{\kappa})$   
 $\times \left( -2J_0((\ln M_{L_T})''(\hat{\kappa})) + 3\hat{\kappa} J_1((\ln M_{L_T})''(\hat{\kappa}), \hat{\kappa}) - \hat{\kappa}^2 J_2((\ln M_{L_T})''(\hat{\kappa}), \hat{\kappa}) \right)$ .

où

$$\begin{cases} J_0(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}, \\ J_1(m, x) = \text{sign}(x) e^{\frac{1}{2}mx^2} \mathcal{N}_1(-m|x|), \\ J_2(m, x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi}} - m|x| e^{\frac{1}{2}ms^2} \mathcal{N}_1(-m|x|). \end{cases}$$

### **La méthode de Stein**

La méthode de Stein est un outil récent à étudier le calcul numérique de l'espérance d'une fonction évaluée en la somme d'une famille de variables aléatoires indépendante. Cette méthode est motivée par le théorème de centrale limite qui prédit que la loi d'une somme de variables aléatoires centrées, carré intégrables et identiquement distribuées est proche d'une loi gaussienne lorsque le nombre de variable aléatoire est assez grand. L'inégalité de Berry-Esseen ainsi que ses généralisations donnent une estimation de la vitesse de convergence suivant les moments  $> 2$  des variables aléatoires.

Soient  $(X_1, \dots, X_n)$  une famille de variables aléatoires centrées, qui admet la même loi que celle d'une variable aléatoire fixée  $X$  ayant le moment d'ordre 3. Soit

$$W = (X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$$

leur somme. L'inégalité de Berry-Esseen (uniforme) montre que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$|\mathbb{P}(W \leq t) - \Phi_\sigma(\mathbf{1}_{\{x \leq t\}})| = O(1/\sqrt{n}),$$

où  $\Phi_\sigma(\cdot)$  désigne l'espérance par rapport à la loi gaussienne  $N(0, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  étant la variance de  $X$ . On obtient par intégration un estimé de l'ordre  $1/\sqrt{n}$  pour le terme d'erreur de l'approximation gaussienne de l'espérance de la forme  $\mathbb{E}[h(W)]$ , où  $h$  est une fonction localement de variation finie qui vérifie certaines conditions de croissance à l'infinie.

Dans la pratique, l'approximation gaussienne peut souvent être améliorée, surtout quand la fonction  $h$  possède de certaines propriétés de régularité. Cependant, l'approche classique via la transformation de Fourier profite difficilement la régularité de  $h$ . L'approche de Stein évite l'utilisation directe de la transformation de Fourier, et donc est particulièrement convenable à étudier les corrections de l'approximation gaussienne.

La méthode de Stein est basée sur l'observation suivante : si  $Z$  est une variable aléatoire centrée et de variance  $\sigma^2$ , alors elle suit la loi normale  $N(0, \sigma^2)$  si et seulement si l'égalité

$$\mathbb{E}[Zh(Z)] = \sigma^2 \mathbb{E}[h'(Z)]$$

est vérifiée pour toute fonction dérivable telle que les espérances dans la formule sont bien définies. En développant cette idée, Goldstein et Reinert ont proposé la transformation de biais zéro pour les variables aléatoires centrées. Étant donnée une variable aléatoire  $X$  d'espérance nulle, on dit qu'une variable aléatoire  $X^*$  admet la loi de biais zéro de  $X$  si, pour toute fonction différentiable  $f$  on a

$$\mathbb{E}[Xf(X)] = \sigma^2 \mathbb{E}[f'(X^*)],$$

où  $\sigma^2$  est la variance de  $X$ . Par la transformation de biais zéro, la différence entre la loi de  $X$  et la loi normale  $N(0, \sigma^2)$  peut être mesurée par la distance entre les lois de  $X$  et de sa transformée de biais zéro  $X^*$ . Dans l'étude de la loi de probabilité de la somme de variable aléatoire indépendantes  $W = X_1 + \dots + X_n$ , le choix de la structure de corrélation entre  $W$  et  $W^*$  est le point clé dans la démonstration du théorème central limite par la méthode de Stein. En effet, si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $X_i^*$  désigne une variable aléatoire indépendante des  $(X_j)_{j=1}^n$  et ayant la loi de biais zéro de  $X_i$ , alors la variable aléatoire  $W^* = W^{(I)} + X_I^*$  est une transformée de biais zéro de  $W$ , où  $W^{(i)} := W - X_i$  et  $I$  est un indice aléatoire indépendant de  $\{X_i, X_i^*\}_{i=1}^n$ , qui prend valeurs dans  $\{1, \dots, n\}$  équiprobablement. Donc les lois de  $W$  et de  $W^*$  sont proches lorsque  $n$  est grand. Cette méthode est similaire à l'approche de Lindeberg où on substitue progressivement les  $X_i$  par des variables aléatoires suivant les lois gaussiennes.

Pour déterminer le terme d'erreur de l'approximation gaussienne à une espérance de la forme  $\mathbb{E}[h(Z)]$ , un outil important est l'équation de Stein. C'est une équation différentielle ordinaire définie comme

$$xf_h(x) - \sigma_W^2 f_h'(x) = h(x) - \Phi_{\sigma_W}(h).$$

En effet, si  $f_h$  est une solution à cette équation, on peut exprimer  $\mathbb{E}[h(W)] - \Phi_{\sigma_W}(h)$  comme

$$\mathbb{E}[h(W)] - \Phi_{\sigma_W}(h) = \sigma_W^2 (\mathbb{E}[f_h'(W^*)] - \mathbb{E}[f_h'(W)]),$$

où  $W^*$  est la transformée de biais zéro.

Dans le cas où la fonction  $h$  est lipschitzienne et la dérivée d'ordre trois de  $f_h$  existe et est bornée l'approximation gaussienne peut être corrigée par un terme supplémentaire

$$C_h = \frac{1}{\sigma_W^2} \mathbb{E}[X_I^*] \Phi_{\sigma_W} \left( \left( \frac{x^2}{3\sigma_W^2} - 1 \right) x h(x) \right).$$

En outre, le terme d'erreur corrigé peut être estimé comme la suite

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}[h(W)] - \Phi_{\sigma_W}(h) - C_h \right| \\ & \leq \|f_h^{(3)}\| \left( \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^4] + \frac{1}{4\sigma_W^2} \left| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^3] \right| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i^s|^3] + \frac{1}{\sigma_W} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^6} \right). \end{aligned}$$

Si on applique ce résultat à l'évaluation de CDO, il est nécessaire de centraliser les variables aléatoires  $(1 - R_i)1_{\{\tau_i \leq T\}}$ . On pose

$$X_i = (1 - R_i)1_{\{\tau_i \leq T\}} - (1 - R_i)p_i, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

où  $p_i = \mathbb{P}(\tau_i \leq T)$ . Soient  $W = X_1 + \dots + X_n$  et

$$A = \sum_{i=1}^n (1 - R_i)p_i.$$

Ainsi on peut exprimer  $(L_T - K)^+$  comme  $(W + A - K)_+$ . Le terme de correcteur devient alors

$$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (1 - R_i)^3 (1 - 2p_i)p_i (1 - p_i) K' \phi_1(K'),$$

où  $\phi_1$  est la densité de loi normale standard  $N(0, 1)$ , et

$$K' = \left( \sum_{i=1}^n (1 - R_i)^2 p_i (1 - p_i) \right)^{-1/2} (K - A).$$

# Bibliographie

- [1] T.R. Bielecki and M. Rutkowski. *Credit risk : modeling, valuation and hedging*. Springer-Verlag, 2002.
- [2] R.J. Elliott, M. Jeanblanc, and M. Yor. On models of default risk,. *Mathematical Finance*, 10 :179–195, 2000.
- [3] J. Jacod. Grossissement initial, hypothèse H' et théorème de Girsanov. In *Séminaire de Calcul Stochastique, 1982/83*), volume 1118 of *Lecture Notes in Math.*, pages 15–35. Springer, Berlin, 1997.
- [4] J Jacod and A. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer-Verlag, 2002.
- [5] M. Jeanblanc and M. Rutkowski. Modelling of default risk : mathematical tools. Working paper, 2000.
- [6] T. Jeulin. Grossissement d'une filtration et applications. In *Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78)*, volume 721 of *Lecture Notes in Math.*, pages 574–609. Springer, Berlin, 1979.
- [7] T. Jeulin and M. Yor. Grossissement d'une filtration et semi-martingale : formules explicites. In *Séminaire de Probabilités, XII, Lecture notes in mathematics*, 649, pages 78–97. Springer, Berlin, 1978.
- [8] Th. Jeulin and M. Yor, editors. *Grossissements de filtrations : exemples et applications*, volume 1118 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Papers from the seminar on stochastic calculus held at the Université de Paris VI, Paris, 1982/1983.
- [9] R. Mansuy and M. Yor. *Random Times and Enlargements of Filtrations in a Brownian Setting*. Springer-Verlag, 2006.